THÉORIE GÉNÉRALE
DES SURFACES.

TROISIÈME PARTIE.

LIVRE VI.

LIGNES GÉODÉSIQUES ET COURBURE GÉODÉSIQUE.

CHAPITRE I.

DÉTERMINATION DES GÉODÉSIQUES PAR LA MÉTHODE DE JACOBI.

Surfaces de révolution; lignes géodésiques. — Équation de Clairaut. — Détermination des surfaces pour lesquelles les géodésiques sont généralement fermées; celles de ces surfaces qui ont un équateur sont applicables sur la sphère. — Géodésiques des surfaces dont l'élément linéaire est réductible à la forme étudiée par M. Liouville

$$ds^2 = (U - V)(U_1^2\,du^2 + V_1^2\,dv^2).$$

Forme géométrique que l'on peut donner à l'intégrale première. — Première application au plan et à la sphère. — Géodésiques de l'ellipsoïde; leur discussion sommaire et leur division en trois espèces. — Propositions géométriques se rapportant à l'élément linéaire de Liouville; coniques géodésiques isothermes; familles de courbes qui peuvent être regardées de deux manières différentes comme formées de coniques géodésiques. — Extension de divers théorèmes de Graves et de M. Chasles.

578. Nous avons vu [II, p. 428] que si l'élément linéaire d'une surface est donné sous sa forme la plus générale

$$(1)\qquad ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2,$$

la détermination des lignes géodésiques de la surface se ramène à

celle d'une solution, contenant une constante arbitraire C, de l'équation

$$(2) \qquad \Delta\theta = \frac{\mathrm{E}q^2 - 2\mathrm{F}pq + \mathrm{G}p^2}{\mathrm{EG} - \mathrm{F}^2} = 1,$$

où p et q désignent, selon l'usage, les dérivées partielles $\frac{\partial\theta}{\partial u}$, $\frac{\partial\theta}{\partial v}$. Alors l'équation générale d'une ligne géodésique sera

$$(3) \qquad \frac{\partial\theta}{\partial \mathrm{C}} = \mathrm{C}',$$

C′ désignant une nouvelle constante; et, en chaque point de cette ligne, on aura

$$(4) \qquad p = \mathrm{E}\frac{du}{ds} + \mathrm{F}\frac{dv}{ds}, \qquad q = \mathrm{F}\frac{du}{ds} + \mathrm{G}\frac{dv}{ds},$$

les différentielles du, dv, ds se rapportant à un déplacement sur la ligne géodésique.

579. Une solution θ satisfaisant à la condition que nous venons d'indiquer s'obtient presque immédiatement dans quelques cas simples, que nous allons étudier en premier lieu.

Supposons d'abord que E, F, G dépendent de la seule variable u; auquel cas, on le reconnaît aisément, l'élément linéaire (1) convient à une surface applicable sur une surface de révolution. On pourra prendre alors

$$\theta = \mathrm{C}v + \varphi(u),$$

C désignant une constante; et l'équation (2) fera connaître $\varphi'(u)$, d'où l'on déduira par une quadrature la fonction $\varphi(u)$ et, par suite, la fonction θ. On trouve ainsi

$$(5) \qquad \theta = \mathrm{C}v + \int \frac{\mathrm{CF} + \sqrt{\mathrm{EG} - \mathrm{F}^2}\sqrt{\mathrm{G} - \mathrm{C}^2}}{\mathrm{G}}\,du,$$

et il suffira de porter cette valeur de θ dans l'équation (3) pour obtenir l'équation générale des lignes géodésiques.

580. Considérons, par exemple, une surface de révolution dont l'élément linéaire soit donné sous la forme

$$ds^2 = du^2 + r^2\,dv^2,$$

où r est une fonction de u; u désignera l'arc du méridien compté à partir d'une origine fixe et r le rayon du parallèle passant par le point de coordonnées u, v. On aura ici, en mettant a au lieu de C,

$$\theta = av + \int \sqrt{r^2 - a^2}\,\frac{du}{r}, \tag{6}$$

et l'équation générale des géodésiques sera

$$v = a \int \frac{du}{r\sqrt{r^2 - a^2}} + a', \tag{7}$$

avec les deux constantes arbitraires a et a'.

L'équation différentielle du premier ordre

$$dv = \frac{a\,du}{r\sqrt{r^2 - a^2}} \tag{8}$$

des lignes géodésiques qui correspondent à la même valeur de a peut se mettre sous la forme élégante

$$r \sin \omega = a, \tag{9}$$

ω désignant l'angle que fait en chaque point la ligne géodésique avec le méridien de la surface. Cette dernière relation, qui est due à Clairaut et qui est très utile pour la discussion, n'est d'ailleurs qu'une conséquence du théorème des moments lorsqu'on regarde la ligne géodésique comme la trajectoire d'un point qui n'est soumis à aucune force.

Il résulte immédiatement de la formule (7) que toutes les géodésiques qui correspondent à la même valeur de a et à des valeurs différentes de a' sont les différentes positions que prend l'une d'elles en tournant autour de l'axe. Les trajectoires orthogonales de ces différentes positions s'obtiennent en égalant à une constante la fonction θ définie par l'équation (6).

Sous l'une ou l'autre de ses formes (8) ou (9), l'intégrale première admet une solution singulière qu'il faudra évidemment rejeter. En faisant, par exemple,

$$du = 0, \qquad r = a,$$

on obtiendrait un parallèle quelconque de la surface. Or il est

évident *a priori* qu'un parallèle ne peut devenir une ligne géodésique que dans le cas où son plan coupe la surface à angle droit, le rayon du parallèle passant alors, en général, par un maximum ou un minimum.

581. Sans nous arrêter à expliquer comment s'est introduite cette solution étrangère, nous remarquerons que les équations (8) et (9) rendent possible une discussion générale de la ligne géodésique. On verra aisément que, si le méridien a des branches infinies, il y a des lignes géodésiques qui s'étendent elles-mêmes à l'infini. Elles deviennent généralement asymptotes à une section plane parallèle à l'axe; mais elles peuvent aussi tourner indéfiniment autour de cet axe, comme il arrive dans le cylindre et dans le paraboloïde de révolution. S'il y a sur la surface un parallèle minimum, il y aura généralement des lignes géodésiques se rapprochant indéfiniment de ce parallèle, sans jamais se confondre avec lui. C'est ce qui a lieu pour l'hyperboloïde de révolution [1]. Dans ce qui va suivre, nous nous contenterons d'examiner le cas particulièrement intéressant où la surface admet un parallèle maximum, et nous allons montrer qu'il existe une infinité de lignes géodésiques dont le cours se déroule tout entier dans la zone qui contient ce parallèle.

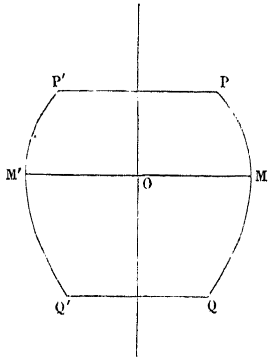
582. Soit MM′ (*fig.* 37) le parallèle maximum de rayon $OM = R$ et soient PP′, QQ′ deux parallèles de rayon égal à a qui limiteront une zone, divisée en deux parties généralement inégales par le parallèle MM′. Il est évident que les lignes géodésiques, toutes égales, définies par l'équation

$$v = \int \frac{a\,du}{\pm r\sqrt{r^2 - a^2}} + \text{const.}$$

[1] On pourra consulter, dans le bel Ouvrage de M. G.-H. HALPHEN, une étude développée des lignes géodésiques des surfaces de révolution du second degré. Voir *Traité des fonctions elliptiques et de leurs applications*, t. II, Chap. VI. Dans le cas de l'hyperboloïde de révolution à une nappe, il y a trois espèces différentes de lignes géodésiques. Les unes sont tangentes à un parallèle de la surface, les autres rencontrent sous un angle fini tous les parallèles et le cercle de gorge; enfin, la troisième espèce est formée de géodésiques asymptotes au cercle de gorge.

sont comprises dans la zone que nous venons de définir et tangentes aux deux parallèles PP′, QQ′. Imaginons, par exemple, qu'on

Fig. 37.



parte d'un point p situé sur le parallèle PP′, en attribuant le signe $+$ au radical. Dans la zone limitée par PP′ et MM′, r ira en croissant et, si l'on désigne par v_0 la valeur initiale de v, on aura

$$(10) \qquad v - v_0 = \int_a^r \frac{a\,du}{r\sqrt{r^2 - a^2}};$$

du, étant la différentielle de l'arc du méridien, sera défini par une équation de la forme

$$(11) \qquad du = \varphi(r)\,dr,$$

et v s'obtiendra par la quadrature précédente. Cette formule (10) sera valable tant que r ne dépassera pas R. Pour $r = \mathrm{R}$, on aura une valeur v_1 de v définie par l'équation

$$(12) \qquad v_1 - v_0 = \int_a^{\mathrm{R}} \frac{a\,\varphi(r)\,dr}{r\sqrt{r^2 - a^2}}.$$

Lorsque la ligne géodésique pénétrera dans la zone MM′QQ′, r ira en diminuant. On aura ici

$$(13) \qquad du = -\psi(r)\,dr,$$

$\psi(r)$ étant une fonction qui sera distincte de $\varphi(r)$ tant que MM′ ne sera pas un plan de symétrie, un *équateur* de la surface; et

l'équation de la ligne géodésique dans cette zone sera

$$(14)\qquad v - v_1 = -\int_{\mathrm{R}}^{r} \frac{a\,\psi(r)\,dr}{r\sqrt{r^2 - a^2}}.$$

Pour $r = a$, la ligne géodésique deviendra tangente en un certain point q au parallèle inférieur et la valeur v_2 de v correspondante à ce point sera définie par l'équation

$$v_2 - v_1 = -\int_{\mathrm{R}}^{a} \frac{a\,\psi(r)\,dr}{r\sqrt{r^2 - a^2}}.$$

Par suite, l'angle Ω compris entre les méridiens passant par le point final q et le point initial p de la ligne géodésique aura pour valeur

$$(15)\qquad \Omega = v_2 - v_0 = \int_{a}^{\mathrm{R}} \frac{a[\varphi(r) + \psi(r)]\,dr}{r\sqrt{r^2 - a^2}}.$$

Pour obtenir le cours ultérieur de la ligne géodésique, il suffira évidemment de prendre la symétrique de la portion trouvée par rapport au plan méridien passant par q, puis de faire tourner l'ensemble des deux portions ainsi obtenues autour de l'axe de la surface successivement des angles 2Ω, 4Ω, 6Ω, ..., de sorte que la ligne géodésique se composera d'une suite de segments égaux disposés symétriquement autour de l'axe. Ces segments seront en nombre illimité tant que le rapport de Ω au nombre π ne sera pas un nombre commensurable.

On sait que, sur la sphère, les lignes géodésiques sont toutes fermées. Proposons-nous de trouver toutes les surfaces jouissant de la même propriété. Elles devront avoir, on le reconnaîtra aisément, au moins un parallèle maximum; et, pour que les lignes géodésiques demeurant dans le voisinage de ce parallèle soient toutes fermées, il faudra que l'angle Ω défini par la formule (15) soit dans un rapport commensurable à π pour toutes les valeurs de a. Cette condition exige évidemment que l'angle Ω *soit indépendant de a*. On devra donc avoir

$$(16)\qquad \int^{\mathrm{R}} \frac{a[\varphi(r) + \psi(r)]\,dr}{r\sqrt{r^2 - a^2}} = m\pi,$$

m désignant un nombre commensurable constant. Nous sommes ainsi conduits au problème d'Analyse suivant : Déterminer la fonction $\varphi(r) + \psi(r)$ de telle manière que l'équation précédente ait lieu, au moins pour toutes les valeurs de a suffisamment voisines de R.

Par un changement de notations on ramène le problème précédent à celui qui est résolu dans la théorie des courbes tautochrones.

Posons

$$\frac{1}{r^2} = z + \frac{1}{R^2}, \qquad \frac{1}{a^2} = \alpha + \frac{1}{R^2}, \qquad r[\varphi(r) + \psi(r)] = 2\theta(z). \tag{17}$$

L'intégrale précédente prend la forme

$$\int_0^\alpha \frac{\theta(z)\,dz}{\sqrt{\alpha - z}};$$

et, pour qu'elle soit indépendante de α, il faut que l'on ait, comme on sait,

$$\theta(z) = \frac{C}{\sqrt{z}}.$$

En revenant aux notations primitives, on trouvera ici

$$\varphi(r) + \psi(r) = \frac{2CR}{\sqrt{R^2 - r^2}}.$$

On aura d'ailleurs

$$\Omega = \int_0^\alpha \frac{C\,dz}{\sqrt{z(\alpha - z)}} = C\pi.$$

Il suffira donc de prendre $C = m$, m étant un nombre commensurable, et l'on aura l'équation de condition

$$\varphi(r) + \psi(r) = \frac{2mR}{\sqrt{R^2 - r^2}}. \tag{18}$$

Cette équation admet une interprétation géométrique. Remarquons que les intégrales

$$\int_r^R \varphi(r)\,dr, \qquad \int_r^R \psi(r)\,dr$$

désignent les arcs du méridien comptés à partir du parallèle MM',

le premier dans la zone supérieure, le second dans la zone inférieure. En désignant par s, s' ces deux arcs, la formule (18) nous donne

$$(19) \qquad s + s' = 2m\mathrm{R} \arccos \frac{r}{\mathrm{R}}.$$

Ainsi, pour que les lignes géodésiques soient fermées, il faut que *l'arc du méridien compris entre deux parallèles égaux soit égal à m fois l'expression que l'on obtiendrait si l'on remplaçait la surface par une sphère de rayon* R.

Dans le cas où le parallèle maximum est un plan de symétrie, on a

$$s' = s;$$

l'équation (19) nous donne

$$s = m\mathrm{R} \arccos \frac{r}{\mathrm{R}},$$
$$r = \mathrm{R} \cos \frac{s}{m\mathrm{R}},$$

et l'élément linéaire de la surface de révolution prend la forme

$$ds^2 = du^2 + \mathrm{R}^2 \cos^2 \frac{u}{m\mathrm{R}} dv^2.$$

Posons

$$(20) \qquad u = m\mathrm{R}u', \qquad v = mv',$$

l'élément linéaire deviendra

$$(21) \qquad ds^2 = m^2\mathrm{R}^2(du'^2 + \cos^2 u' \, dv'^2).$$

Sous cette forme, on reconnaît immédiatement qu'il convient à une surface de révolution applicable sur la sphère de rayon $m\mathrm{R}$. La condition que m soit un nombre commensurable s'interprète géométriquement de la manière suivante.

Considérons une surface de révolution comme composée d'un nombre illimité de feuillets superposés, engendrés par la rotation indéfinie du méridien. Alors un point de cette surface aura une infinité de systèmes de coordonnées u, v; u, $v + 2\pi$; ..., u, $v + 2h\pi$; ..., suivant qu'on le considérera comme appartenant au premier, au second feuillet ou au feuillet de rang $h+1$. D'après cela, les formules (20) feront correspondre à un point (u, v) de la surface de révolution un point (u', v') de la sphère défini par

les équations

$$(22) \qquad u' = \frac{u}{mR}, \qquad v' = \frac{v + 2h\pi}{m},$$

h étant un entier quelconque. Or, si m est incommensurable, les valeurs obtenues de v' correspondent toutes à des points distincts de la sphère; au contraire, si m est commensurable, ces valeurs de v' ne conviennent qu'à un nombre limité de points. Comme le même résultat se retrouve dans la transformation inverse, nous pouvons énoncer le théorème suivant :

Les seules surfaces de révolution, ayant un équateur, pour lesquelles les lignes géodésiques soient toujours fermées, sont la sphère et les surfaces qui sont applicables sur la sphère de telle manière qu'à chaque point de l'une des surfaces correspondent des points en nombre limité de l'autre (¹).

583. Considérons maintenant l'élément linéaire défini par la formule générale

$$(23) \qquad ds^2 = (U - V)(U_1^2\, du^2 + V_1^2\, dv^2),$$

où U, U_1 désignent des fonctions de u et V, V_1 des fonctions de v. On pourrait, sans restreindre la généralité, supposer $U_1 = V_1 = 1$; mais nous garderons la forme précédente, parce qu'elle est la plus commode pour les applications. Remarquons d'ailleurs qu'elle comprend comme cas particulier celle qui convient aux surfaces de révolution; il suffira d'y remplacer V par une constante. En choisissant convenablement les différentes fonctions, on retrouvera aussi, nous l'avons déjà remarqué [I, p. 157], l'élément linéaire de l'ellipsoïde à trois axes inégaux rapporté à ses lignes de courbure. C'est à Jacobi que l'on doit, nous l'avons déjà dit, la détermination des lignes géodésiques de cette dernière surface. M. Liouville, qui a, le premier, considéré l'élément linéaire (23) sous sa forme la plus générale, a pu lui appliquer, sans avoir besoin de la modifier, la méthode si simple de Jacobi.

(¹) Au n° 77 nous avons étudié d'une manière générale les surfaces de révolution applicables sur la sphère.

L'équation qu'il s'agit d'intégrer est ici

$$(24)\qquad \Delta\theta = \frac{1}{U-V}\left[\frac{1}{U_1^2}\left(\frac{\partial\theta}{\partial u}\right)^2 + \frac{1}{V_1^2}\left(\frac{\partial\theta}{\partial v}\right)^2\right] = 1.$$

Écrivons-la comme il suit

$$-\frac{1}{U_1^2}\left(\frac{\partial\theta}{\partial u}\right)^2 + U = \frac{1}{V_1^2}\left(\frac{\partial\theta}{\partial v}\right)^2 + V;$$

nous reconnaîtrons immédiatement qu'elle admet une infinité de solutions qui sont la somme d'une fonction de u et d'une fonction de v. Pour de telles solutions, en effet, la valeur commune des deux membres de l'équation précédente ne peut dépendre ni de v ni de u et doit, par suite, se réduire à une constante, que nous désignerons par a. On trouve ainsi

$$(25)\qquad \left(\frac{\partial\theta}{\partial u}\right)^2 = U_1^2(U-a), \qquad \left(\frac{\partial\theta}{\partial v}\right)^2 = V_1^2(a-V),$$

ce qui donne

$$(26)\qquad \theta = \int U_1\sqrt{U-a}\,du + \int V_1\sqrt{a-V}\,dv,$$

les radicaux $\sqrt{U-a}$, $\sqrt{a-V}$ étant pris avec des signes quelconques.

Il suffira maintenant de prendre la dérivée de θ par rapport à a et l'on sera conduit à l'équation générale des lignes géodésiques

$$(27)\qquad \int\frac{U_1\,du}{\sqrt{U-a}} - \int\frac{V_1\,dv}{\sqrt{a-V}} = a'.$$

Si l'on différentie cette équation, on obtient la relation

$$(28)\qquad \frac{U_1\,du}{\sqrt{U-a}} - \frac{V_1\,dv}{\sqrt{a-V}} = 0,$$

qui peut être regardée comme une intégrale première de l'équation différentielle des lignes géodésiques.

M. Liouville a montré qu'on peut la transformer d'une manière élégante en introduisant l'angle ω que fait, en chaque point, la ligne géodésique avec la courbe coordonnée de paramètre v. On a, en effet (n° 499),

$$ds\cos\omega = U_1\sqrt{U-V}\,du, \qquad ds\sin\omega = V_1\sqrt{U-V}\,dv;$$

ce qui permet de remplacer l'équation (28) par la suivante

$$\frac{\cos\omega}{\sqrt{U-a}} = \frac{\sin\omega}{\sqrt{a-V}}. \tag{29}$$

En résolvant par rapport à la constante, on trouvera

$$a = U\sin^2\omega + V\cos^2\omega. \tag{30}$$

Cette forme de l'intégrale première correspond à l'équation (9) de Clairaut; elle est très souvent employée.

584. On aurait pu obtenir les résultats précédents par l'emploi d'un élégant artifice de calcul. Reprenons l'expression de l'élément linéaire

$$ds^2 = (U-V)(U_1^2\,du^2 + V_1^2\,dv^2),$$

qu'on peut mettre sous la forme

$$ds^2 = \left[(\sqrt{U-a})^2 + (\sqrt{a-V})^2\right]\left[(U_1\,du)^2 + (V_1\,dv)^2\right].$$

On a ainsi le produit de deux sommes de carrés. En appliquant une formule bien connue, on peut transformer ce produit en une somme de carrés, ce qui donne

$$ds^2 = (U_1\sqrt{U-a}\,du + V_1\sqrt{a-V}\,dv)^2 + (V_1\sqrt{U-a}\,dv - U_1\sqrt{a-V}\,du)^2.$$

Posons

$$\left\{\begin{aligned} &U_1\sqrt{U-a}\,du + V_1\sqrt{a-V}\,dv = d\theta,\\ &\frac{U_1\,du}{\sqrt{U-a}} - \frac{V_1\,dv}{\sqrt{a-V}} = d\theta_1: \end{aligned}\right. \tag{31}$$

il viendra

$$ds^2 = d\theta^2 + (U-a)(a-V)\,d\theta_1^2. \tag{32}$$

Cette formule met immédiatement en évidence les lignes géodésiques ($\theta_1 =$ const.) et leurs trajectoires orthogonales ($\theta =$ const.). On retrouve ainsi dans toute leur généralité les résultats précédents : l'équation de la ligne géodésique est

$$\frac{U_1\,du}{\sqrt{U-a}} - \frac{V_1\,dv}{\sqrt{a-V}} = 0; \tag{33}$$

la différentielle de son arc est définie par la formule

$$ds = d\theta = U_1\sqrt{U-a}\,du + V_1\sqrt{a-V}\,dv = \frac{UU_1\,du}{\sqrt{U-a}} - \frac{VV_1\,dv}{\sqrt{a-V}}, \tag{33'}$$

qui ramène le calcul de cet arc à celui de deux quadratures. Les deux équations précédentes nous donnent encore les relations

$$\frac{U_1\,du}{\sqrt{U-a}} = \frac{V_1\,dv}{\sqrt{a-V}} = \frac{ds}{U-V}, \tag{34}$$

qui feront connaître les valeurs de $\frac{du}{ds}$, $\frac{dv}{ds}$.

585. Parmi les surfaces dont l'élément linéaire est réductible à la forme (23), nous avons précédemment signalé le plan, la sphère [II, p. 422] et les surfaces du second degré [I, p. 157, ou II, p. 379]. Appliquons à ces surfaces la proposition générale que nous venons d'établir.

Soit d'abord

$$ds^2 = (\mu^2-\nu^2)\left[\frac{d\mu^2}{\mu^2-c^2} + \frac{d\nu^2}{c^2-\nu^2}\right] \tag{35}$$

l'élément linéaire du plan, rapporté à des coordonnées elliptiques. En appliquant la formule (33), on voit que l'équation

$$\frac{d\mu}{\sqrt{(\mu^2-c^2)(\mu^2-\alpha)}} - \frac{d\nu}{\sqrt{(\nu^2-c^2)(\nu^2-\alpha)}} = 0, \tag{36}$$

où α désigne une constante arbitraire, représentera une géodésique du plan, c'est-à-dire une ligne droite.

Cette droite ne sera réelle que si la constante α est positive et l'on reconnaîtra aisément qu'elle est tangente à la conique homofocale de paramètre $\sqrt{\alpha}$. Ainsi *l'équation différentielle précédente, qui n'est autre que l'équation d'Euler, admet pour intégrale générale l'équation en coordonnées elliptiques d'une droite tangente à la conique homofocale de paramètre* $\sqrt{\alpha}$.

Ce résultat est dû à Lagrange, qui l'a donné dans son étude sur le problème des deux centres fixes (¹). Il avait alors un grand

(¹) Voir *Mécanique analytique*, seconde Partie, Section VII, Chap. III, n° 84. Pour être tout à fait exact, nous devons dire que Lagrange obtient un résultat un peu plus général et retrouve l'équation d'Euler dans le cas où les trois forces qu'il considère se réduisent à une seule émanant d'un centre fixe et proportionnelle à la distance.

intérêt; car il constituait la première intégration de l'équation d'Euler obtenue en dehors des méthodes purement analytiques.

Remarquons d'ailleurs que l'équation (33)' nous donnera ici

$$(37)\qquad ds = \frac{\mu^2\, d\mu}{\sqrt{(\mu^2-c^2)(\mu^2-\alpha)}} - \frac{\nu^2\, d\nu}{\sqrt{(\nu^2-c^2)(\nu^2-\alpha)}};$$

et cette relation, qui fait connaître par des quadratures la longueur d'un segment de ligne droite, équivaut au théorème d'addition pour les intégrales elliptiques de seconde espèce.

Le lecteur établira aisément des résultats analogues en déterminant les lignes géodésiques de la sphère au moyen de la forme que nous avons donnée [II, p. 422]

$$ds^2 = (\cos 2\mu - \cos 2\nu)\left(\frac{d\mu^2}{\cos 2\mu - \cos 2c} + \frac{d\nu^2}{\cos 2c - \cos 2\nu}\right)$$

pour l'élément linéaire de cette surface rapportée à des coordonnées elliptiques.

Une seule différence mérite d'être signalée entre ce cas et le précédent : la formule relative à l'arc d'une ligne géodésique donnera, pour la sphère, le théorème d'addition des intégrales elliptiques de *troisième espèce*.

586. Considérons maintenant une surface du second degré et choisissons, pour fixer les idées, un ellipsoïde à trois axes inégaux. Si l'on conserve toutes les notations déjà employées au n° **459** [II, p. 296] et si β désigne le paramètre de cet ellipsoïde, l'équation de l'ellipsoïde sera

$$(38)\qquad \frac{x^2}{a-\beta} + \frac{y^2}{b-\beta} + \frac{z^2}{c-\beta} - 1 = 0,$$

et l'élément linéaire de cette surface sera donné par la formule

$$(39)\qquad ds^2 = (\rho-\rho_1)\left[\frac{\rho-\beta}{f(\rho)}\, d\rho^2 - \frac{\rho_1-\beta}{f(\rho_1)}\, d\rho_1^2\right],$$

$f(\rho)$ ayant pour valeur

$$(40)\qquad f(\rho) = 4(a-\rho)(b-\rho)(c-\rho).$$

On déduit de là, par l'application des formules précédentes, que

l'équation générale d'une ligne géodésique sera

$$\sqrt{\frac{\rho-\beta}{f(\rho)(\rho-\alpha)}}\,d\rho-\sqrt{\frac{\rho_1-\beta}{f(\rho_1)(\rho_1-\alpha)}}\,d\rho_1=0, \tag{41}$$

α désignant une constante arbitraire, et que l'arc de cette ligne aura pour différentielle

$$ds=\rho\sqrt{\frac{\rho-\beta}{f(\rho)(\rho-\alpha)}}\,d\rho-\rho_1\sqrt{\frac{\rho_1-\beta}{f(\rho_1)(\rho_1-\alpha)}}\,d\rho_1. \tag{42}$$

Ces résultats sont bien d'accord avec ceux que nous avons obtenus au n° 462. ρ, paramètre des hyperboloïdes à deux nappes, est compris entre a et b. On a donc

$$f(\rho)>0, \qquad \rho-\beta>0.$$

De même, le paramètre ρ_1 des hyperboloïdes à deux nappes, compris entre b et c, nous donne les inégalités

$$f(\rho_1)<0, \qquad \rho_1-\beta>0.$$

Il faudra donc, pour que ds soit réel, que l'on ait

$$\rho-\alpha>0, \qquad \rho_1-\alpha<0;$$

et, par suite, la constante α devra être comprise entre a et c. Cette condition pouvait être prévue; α, nous l'avons vu aux n^{os} 461 et 462, est le paramètre de la surface homofocale à laquelle est circonscrite la développable formée par les tangentes de la ligne géodésique. Comme une droite ne peut être tangente à deux ellipsoïdes homofocaux, il faut que α soit le paramètre d'un hyperboloïde et, par suite, compris entre a et c. De là résulte une classification naturelle des lignes géodésiques de l'ellipsoïde, suivant que α sera inférieur, égal, ou supérieur à b. Si α est inférieur à b, la développable formée par les tangentes de la géodésique sera circonscrite à un hyperboloïde à une nappe. Si α est supérieur à b, elle le sera à un hyperboloïde à deux nappes. Enfin, dans le cas intermédiaire où α est égal à b, les tangentes de la géodésique iront toutes rencontrer la focale hyperbolique. On suit alors aisément le cours de la ligne géodésique, qui va passer par deux des quatre ombilics où cette focale rencontre l'ellipsoïde; et ces deux ombilics sont diamétralement opposés.

Ainsi *toutes les lignes géodésiques qui passent par un ombilic vont passer par l'ombilic diamétralement opposé.*

Si α est différent de b, on peut encore se rendre compte, soit par les équations, soit par la Géométrie, de la forme générale de la ligne géodésique. Supposons, pour fixer les idées,

$$\alpha < b.$$

Alors on aura les limites suivantes pour ρ et pour ρ_1

$$b < \rho < a, \qquad c < \rho_1 < \alpha.$$

Lorsque ρ_1 devient égal à α, l'équation différentielle (41) nous donne

$$d\rho_1 = 0;$$

par suite, la géodésique doit être tangente à la ligne de courbure de paramètre α. Cette ligne se compose de deux traits fermés diamétralement opposés, décrits autour de deux ombilics comme une ellipse autour de ses foyers; et la ligne géodésique, placée dans la zone annulaire comprise entre ces deux courbes fermées, se dirigera de l'une à l'autre en leur devenant successivement tangente. Si on la prolonge indéfiniment, elle ne se fermera pas, en général, et fera un nombre illimité de fois le tour de cette zone ellipsoïdale, dans laquelle elle est assujettie à demeurer. On peut établir ces résultats de la manière la plus nette au moyen de l'artifice suivant.

Écrivons les équations

$$(43) \qquad \frac{ds}{\rho - \rho_1} = \sqrt{\frac{\rho - \beta}{f(\rho)(\rho - \alpha)}}\, d\rho = \sqrt{\frac{\rho_1 - \beta}{f(\rho_1)(\rho_1 - \alpha)}}\, d\rho_1,$$

qui se déduisent des formules (41) et (42) et où l'on prendra les radicaux avec un signe déterminé : elles feront connaître le signe des différentielles $d\rho$ et $d\rho_1$ lorsqu'on suppose ds positive, par exemple. Il est vrai que les signes des radicaux peuvent changer lorsque ρ ou ρ_1 atteignent les limites entre lesquelles ces paramètres doivent varier. Pour éviter ces difficultés, posons

$$(44) \qquad \rho = b\cos^2\varphi + a\sin^2\varphi,$$

$$(45) \qquad \rho_1 = c\cos^2\psi + \alpha\sin^2\psi,$$

ce qui permettra bien d'obtenir, pour des valeurs réelles de φ ou de ψ, toutes les valeurs de ρ et de ρ_1 comprises dans les limites

assignées plus haut. Les équations (43) prendront la forme

$$(46)\qquad ds = \frac{d\varphi}{\sqrt{F(\varphi)}} = \frac{d\psi}{\sqrt{F_1(\psi)}},$$

$\sqrt{F(\varphi)}$, $\sqrt{F_1(\psi)}$ étant des radicaux *qui ne pourront plus s'annuler* et conserveront toujours le signe initial. Il suit de là que $d\varphi$ et $d\psi$ ne changeront jamais de signe; et, par suite, φ, ψ, considérées comme fonctions de s, oscilleront d'une manière régulière entre les limites que nous leur avons assignées. Lorsque φ variera, la ligne de courbure du paramètre ρ défini par l'équation (44) se déplacera en se déformant et tournera, toujours dans le même sens, autour de l'axe des z de l'ellipsoïde. Le point décrivant de la géodésique, qui oscille sur la portion de cette ligne comprise entre les deux points où elle coupe la ligne de courbure $\rho_1 = \alpha$, décrira un trait dont la forme générale sera bien celle que nous avons indiquée.

587. Nous terminerons ce Chapitre en faisant connaître quelques propriétés générales qui appartiennent à toutes les surfaces dont l'élément linéaire est déterminé par la formule de Liouville

$$(47)\qquad ds^2 = (U - V)(U_1^2\, du^2 + V_1^2\, dv^2),$$

les fonctions U, V, U_1, V_1 conservant toute leur généralité. La première de ces propriétés a été signalée par M. Dini, dans un beau Mémoire sur lequel nous aurons l'occasion de revenir. Nous avons vu (n° 527) que, si l'on rapporte une surface à un système d'ellipses et d'hyperboles géodésiques, l'élément linéaire est déterminé par la formule suivante

$$(48)\qquad ds^2 = \frac{du^2}{\sin^2\frac{\omega}{2}} + \frac{dv^2}{\cos^2\frac{\omega}{2}}.$$

Ce système coordonné, qui est orthogonal, peut-il être isotherme? Pour qu'il en soit ainsi, il faudra que l'on ait

$$(49)\qquad U_1^2 \sin^2\frac{\omega}{2} = V_1^2 \cos^2\frac{\omega}{2},$$

U_1 et V_1 désignant des fonctions qui dépendent respectivement de u et de v. Cette équation détermine ω et nous donne pour

l'élément linéaire de la surface l'expression

$$ds^2 = \left(\frac{1}{U_1^2} + \frac{1}{V_1^2}\right)(U_1^2\,du^2 + V_1^2\,dv^2), \tag{50}$$

qui rentre bien dans la forme (47), mais qui paraît, au premier abord, en être un cas très particulier. En réalité, les deux formules sont aussi générales l'une que l'autre; nous laisserons au lecteur le soin de l'établir.

Ainsi on peut caractériser l'élément linéaire (47) en disant que les courbes coordonnées forment *un système isotherme d'ellipses et d'hyperboles géodésiques*. C'est là le résultat de M. Dini.

588. La seconde propriété est plus générale que la précédente, qu'elle comprend comme cas limite. On y est conduit en cherchant s'il existe des surfaces pour lesquelles une famille de courbes puisse être considérée *de deux manières différentes* comme formée d'ellipses ou d'hyperboles géodésiques, c'est-à-dire définie de deux manières différentes par une équation de la forme

$$\theta + \sigma = \text{const.}, \tag{51}$$

où θ et σ sont les distances géodésiques à deux courbes fixes.

Il est clair que, si cette propriété appartient à une famille de courbes, elle appartiendra aussi à la famille orthogonale qui est définie par la relation

$$\theta - \sigma = \text{const.}, \tag{52}$$

toutes les fois que la famille proposée l'est par l'équation (51) [II, p. 417]. La question proposée peut donc se ramener à la suivante : *Existe-t-il un système orthogonal qui puisse être regardé de deux manières différentes comme formé d'ellipses et d'hyperboles géodésiques?*

Soit

$$ds^2 = A^2\,du^2 + C^2\,dv^2 \tag{53}$$

l'expression de l'élément linéaire qui convient à ce système orthogonal. Par hypothèse, les équations des deux familles de courbes coordonnées sont les suivantes

$$\theta + \sigma = \text{const.}, \qquad \theta - \sigma = \text{const.},$$

θ et σ étant les distances géodésiques d'un point de la surface à deux courbes fixes; il faudra donc que l'on ait

$$F(\theta+\sigma)=u, \qquad F_1(\theta-\sigma)=v.$$

On déduit de là, en résolvant par rapport à θ et σ,

$$\theta=\varphi(u)+\psi(v), \qquad \sigma=\varphi(u)-\psi(v). \tag{54}$$

Mais θ et σ, étant des distances géodésiques, doivent satisfaire à l'équation aux dérivées partielles caractéristique

$$\Delta\varphi=1. \tag{55}$$

En exprimant qu'il en est ainsi et que cette équation admet les deux solutions θ, σ, on est conduit à l'unique relation

$$\frac{U}{A^2}+\frac{V}{C^2}=1, \tag{56}$$

où l'on a

$$U=\varphi'^2(u), \qquad V=\psi'^2(v); \tag{57}$$

et, réciproquement, toutes les fois que A et C sont liés par une équation de la forme (56), les courbes coordonnées sont des coniques géodésiques, lieux des points tels que la somme ou la différence de leurs distances géodésiques aux deux courbes de base

$$\left\{\begin{aligned}&\int\sqrt{U}\,du+\int\sqrt{V}\,dv=0,\\&\int\sqrt{U}\,du-\int\sqrt{V}\,dv=0\end{aligned}\right. \tag{58}$$

soit constante sur chacune d'elles. Pour que ces courbes coordonnées puissent, de deux manières différentes, être regardées comme des coniques géodésiques, il sera donc nécessaire et suffisant que A et C vérifient deux relations distinctes

$$\frac{U}{A^2}+\frac{V}{C^2}=1, \qquad \frac{U_1}{A^2}+\frac{V_1}{C^2}=1,$$

de même forme que l'équation (56).

Ces équations peuvent être résolues par rapport à A et à C; mais, avant de faire ce calcul, nous remarquerons qu'on peut les

combiner linéairement et en déduire l'équation nouvelle

$$\frac{\lambda U + (1-\lambda)U_1}{A^2} + \frac{\lambda V + (1-\lambda)V_1}{C^2} = 1,$$

qui sera de même forme qu'elles, pourvu que λ soit une constante, d'ailleurs quelconque. Ainsi nous pouvons déjà énoncer le théorème suivant :

Lorsqu'un système orthogonal peut être considéré de deux manières distinctes comme formé de coniques géodésiques, il y a une infinité de manières différentes de lui conserver cette propriété.

Si l'on calcule maintenant les valeurs de A et de C pour les porter dans l'élément linéaire, on obtient un résultat que l'on peut écrire comme il suit

$$ds^2 = \left(\frac{U}{U-U_1} + \frac{V}{V_1-V}\right)[(U-U_1)\,du^2 + (V_1-V)\,dv^2].$$

C'est bien là la forme générale étudiée par M. Liouville.

Réciproquement, reprenons cette forme générale (47). Si nous prenons les deux solutions déjà déterminées

$$(59)\qquad \begin{cases} \theta = \int U_1\sqrt{U-a}\,du + \int V_1\sqrt{a-V}\,dv, \\ \sigma = \int U_1\sqrt{U-a}\,du - \int V_1\sqrt{a-V}\,dv \end{cases}$$

de l'équation aux dérivées partielles (55), les courbes coordonnées seront définies par les équations

$$\theta + \sigma = \text{const.}, \qquad \theta - \sigma = \text{const.};$$

et, par suite, elles pourront être regardées d'une infinité de manières comme des coniques géodésiques.

589. La proposition que nous venons d'établir offre le plus grand intérêt : elle fait connaître la véritable origine des théorèmes de Graves et de M. Chasles sur les arcs de coniques à différence rectifiable et elle permet d'étendre ces théorèmes à toutes les surfaces dont l'élément linéaire est donné par la formule de M. Liouville.

Pour mettre cette analogie en évidence, remarquons que, si l'on attribue à la constante a une valeur déterminée dans les formules (59), les géodésiques normales aux courbes parallèles

$$\theta = \text{const.} \quad \text{ou} \quad \sigma = \text{const.}$$

sont définies par l'équation

$$\frac{U_1\,du}{\sqrt{U-a}} \pm \frac{V_1\,dv}{\sqrt{a-V}} = 0, \tag{60}$$

obtenue en différentiant par rapport à a la valeur de θ ou de σ (n° 532). Il passe deux de ces lignes par chaque point de la surface et elles y font des angles égaux avec les deux courbes coordonnées. On peut définir géométriquement cette famille de géodésiques de la manière suivante :

Supposons d'abord que la constante a ait été choisie de telle manière que l'une des deux équations

$$U - a = 0, \qquad V - a = 0, \tag{61}$$

la première par exemple, admette une ou plusieurs racines réelles. Soit u_0 une de ces racines; pour $u = u_0$, l'équation différentielle donne

$$du = 0;$$

et, par suite, les géodésiques qui correspondent à la valeur considérée de a sont toutes tangentes à la courbe coordonnée de paramètre u_0. Cette propriété géométrique suffira évidemment à définir l'ensemble de toutes ces géodésiques.

Pour certaines surfaces, telles que l'ellipsoïde ou le plan, l'une des équations (61) admettra toujours une solution réelle; et toutes les familles réelles définies par l'équation (60) seront alors composées de géodésiques tangentes à une des courbes coordonnées. Mais il existe d'autres surfaces pour lesquelles les valeurs de la constante a peuvent être choisies de telle manière qu'aucune des équations (61) n'admette de solution réelle. Envisageons, par exemple, la formule particulière suivante

$$ds^2 = (u^2 + v^2 + h^2)(du^2 + dv^2); \tag{62}$$

l'équation des lignes géodésiques sera ici

$$\frac{du}{\sqrt{u^2 + h^2 - a}} \pm \frac{dv}{\sqrt{a + v^2}} = 0 \tag{63}$$

et, pour toutes les valeurs de a positives et inférieures à h^2, il n'y aura aucune valeur réelle de u ou de v annulant un des dénominateurs. Les lignes géodésiques correspondantes seront réelles, mais elles ne seront tangentes à aucune courbe coordonnée. Nous ramènerons ce cas au précédent en convenant de regarder les géodésiques comme tangentes à une courbe coordonnée imaginaire. En adoptant cette convention, on peut énoncer le résultat suivant.

Les courbes parallèles définies par les équations

$$(64)\quad \begin{cases} \theta = \int U_1\sqrt{U-a}\,du + \int V_1\sqrt{a-V}\,dv = \text{const.}, \\ \sigma = \int U_1\sqrt{U-a}\,du - \int V_1\sqrt{a-V}\,dv = \text{const.} \end{cases}$$

sont les développantes de celle des courbes coordonnées dont le paramètre satisfait à la relation

$$(U-a)(V-a)=0,$$

et la proposition que nous avons établie plus haut peut s'énoncer comme il suit :

Les courbes coordonnées peuvent être regardées comme des coniques géodésiques lorsqu'on prend pour courbes de bases deux développantes (C), (C′) *de l'une quelconque d'entre elles.*

Pour faire dériver de cette remarque le théorème de Graves et de M. Chasles, il suffit de la combiner avec les propriétés des développées. Considérons, par exemple, les géodésiques tangentes à une des courbes coordonnées (u_0) (*fig.* 38) et soient (C), (C′) deux développantes de cette courbe, la coupant à angle droit en R et en R′. Soient PQ, P′Q′ deux géodésiques se coupant en M. D'après la proposition précédente, la somme

$$MQ + MQ'$$

demeurera constante lorsqu'on se déplacera sur une des deux courbes coordonnées qui passent en M. Or on a, d'après les propriétés des développées,

$$PR = MP + MQ, \qquad P'R' = MP' + MQ'$$

et, par suite,

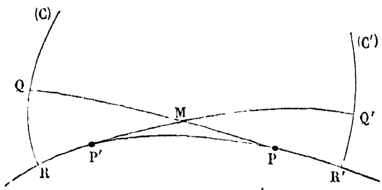
$$MQ + MQ' = PR + P'R' - MP - MP' = RR' - (MP + MP' - PP').$$

On voit donc que la somme

$$MP + MP' - PP'$$

demeurera constante lorsqu'on se déplacera sur l'une des courbes coordonnées qui passent au point M, sur celle qui se trouve dans l'angle QMR. On démontrerait de la même manière les autres relations, analogues au théorème de Graves, qui se rapportent à des dispositions différentes de la figure.

Fig. 38.



Nous n'insisterons pas davantage sur ces relations géométriques et nous indiquerons, en terminant, une autre généralisation, qui se rattache directement aux propositions de M. Chasles relatives aux polygones inscrits ou circonscrits à des coniques homofocales.

Considérons un polygone variable dont tous les côtés sont des lignes géodésiques tangentes à une même courbe coordonnée et dont tous les sommets moins un décrivent des courbes coordonnées. Le dernier sommet de ce polygone décrira aussi une des courbes coordonnées et il en sera de même des points d'intersection de deux côtés quelconques de ce polygone.

CHAPITRE II.

INTÉGRALES HOMOGÈNES DU PREMIER ET DU SECOND DEGRÉ.

Méthodes régulières pour la détermination des géodésiques. — L'équation différentielle du second ordre des géodésiques remplacée par un système canonique. — Usage que l'on peut faire d'une ou de deux intégrales de ce système. — Intégrales homogènes. — Intégrale du premier degré : elle caractérise les surfaces applicables sur les surfaces de révolution. — Intégrale du second degré. — Il y a deux formes distinctes de l'élément linéaire pour lesquelles on trouve une intégrale du second degré. Pour la première et la plus importante, l'élément linéaire est réductible à la forme de M. Liouville. — Détermination de tous les cas dans lesquels il y a à la fois une intégrale du premier et une intégrale du second degré.

---

590. L'artifice que nous avons employé dans le Chapitre précédent et qui nous a fait connaître les lignes géodésiques pour la forme spéciale de l'élément linéaire considérée par M. Liouville a permis à Jacobi de donner une solution élégante des problèmes les plus importants de la Dynamique du point matériel; mais il semble difficile de l'étendre ou de le généraliser. Il faut donc revenir à la théorie générale et indiquer les méthodes régulières qui permettent de déterminer une solution, contenant une constante arbitraire, de l'équation

$$\Delta\theta = 1. \tag{1}$$

Étant donnée une équation aux dérivées partielles

$$f(u, v, p, q) = 0, \tag{2}$$

la recherche d'une intégrale complète de cette équation se ramène, comme on sait, à la détermination d'une fonction $\varphi(u, v, p, q)$ telle que l'équation (2) et la suivante

$$\varphi(u, v, p, q) = C, \tag{3}$$

où C désigne une constante arbitraire, soient compatibles, c'est-à-dire qu'elles fournissent des valeurs de p et de q satisfaisant à la

condition

$$\frac{\partial p}{\partial v} - \frac{\partial q}{\partial u} = 0$$

pour toutes les valeurs de C. D'après cela, si l'on calcule, au moyen des équations (2) et (3), les valeurs des deux dérivées qui entrent dans la relation précédente, on trouvera la condition

$$(f, \varphi) = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial \varphi}{\partial q} - \frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial \varphi}{\partial v} = 0, \tag{4}$$

qui ne contient plus C et devra avoir lieu, par conséquent, pour toutes les valeurs de u, v, p, q qui satisfont uniquement à l'équation (2).

Dans le cas spécial qui nous occupe, nous sommes donc conduits à déterminer une fonction φ satisfaisant à l'équation linéaire

$$(\Delta, \varphi) = 0, \tag{5}$$

pour tous les systèmes de valeurs de u, v, p, q liées par l'équation (1).

L'intégration complète de cette équation linéaire (5) se ramène, comme on sait, à celle du système suivant d'équations différentielles

$$\frac{du}{\frac{\partial \Delta}{\partial p}} = \frac{dv}{\frac{\partial \Delta}{\partial q}} = \frac{-dp}{\frac{\partial \Delta}{\partial u}} = \frac{-dq}{\frac{\partial \Delta}{\partial v}}, \tag{6}$$

qui définit ce que l'on appelle les *caractéristiques* de l'équation aux dérivées partielles (1).

Ce système admet évidemment une première intégrale, Δ, dont la valeur constante doit ici être prise égale à 1. Si l'on en connaît une autre intégrale φ, on pourra achever la solution du problème et déterminer par de simples quadratures les géodésiques de la surface. Mais il est nécessaire de donner quelques développements sur ce point essentiel.

Si l'on combine l'une des équations (6)

$$\frac{du}{\frac{\partial \Delta}{\partial p}} = \frac{dv}{\frac{\partial \Delta}{\partial q}} \tag{7}$$

avec l'équation de condition

$$\Delta = 1,$$

on en déduira les valeurs suivantes de p et de q

$$(8)\qquad p = \mathrm{E}\frac{du}{ds} + \mathrm{F}\frac{dv}{ds}, \qquad q = \mathrm{F}\frac{du}{ds} + \mathrm{G}\frac{dv}{ds},$$

et il suffira de porter ces valeurs dans une autre des équations (6), par exemple dans la suivante

$$\frac{dv}{\frac{\partial \Delta}{\partial q}} = \frac{-dp}{\frac{\partial \Delta}{\partial u}},$$

pour en déduire une équation du second ordre entre u et v. *Cette équation du second ordre, qui tient lieu du système* (6), *sera précisément celle des lignes géodésiques.* Il est aisé de le vérifier presque immédiatement par le calcul direct; mais on peut aussi le reconnaître par un raisonnement *a priori*.

En effet, si, dans le système (6), on remplace p et q par les dérivées partielles d'une solution quelconque de l'équation aux dérivées partielles (1), on sait, d'après les propriétés générales des équations aux dérivées partielles du premier ordre, que ce système se réduira à la seule équation (7). Or cette équation définit, on le vérifie aisément, les trajectoires orthogonales des courbes $\theta = \text{const.}$, et ces trajectoires sont, comme on l'a vu, des lignes géodésiques.

Au reste, on arrive à la même conclusion si l'on traite le problème des lignes géodésiques comme une question de Mécanique. En employant la méthode et les variables d'Hamilton [II, p. 481], on est conduit, pour définir la ligne géodésique, à un système canonique qui donne immédiatement les équations (6).

Ainsi, on peut considérer le système (6) comme tenant lieu de l'équation différentielle du second ordre des lignes géodésiques pourvu que l'on y regarde p et q comme des inconnues auxiliaires, qui sont d'ailleurs définies en fonction de u, v, $\frac{du}{dv}$ par les formules (8). Ce point étant établi, examinons les différents cas qui peuvent se présenter.

591. Supposons d'abord que l'on connaisse deux intégrales distinctes ϖ et ψ du système (6).

L'élimination de p et de q entre les équations

$$\varphi = C, \qquad \psi = C', \qquad \Delta = 1$$

donnera l'équation en termes finis, contenant les deux constantes arbitraires C, C', des lignes géodésiques. Cela résulte immédiatement de ce que les trois relations précédentes donnent trois intégrales du système (6).

Si l'on a déterminé une seule intégrale φ, on pourra achever de deux manières différentes la solution du problème proposé. Ou bien on déterminera p et q par les équations

$$\Delta = 1, \qquad \varphi = C,$$

et l'on effectuera ensuite la quadrature

$$\theta = \int (p\, du + q\, dv);$$

les lignes géodésiques seront alors définies par l'équation

$$\frac{\partial \theta}{\partial C} = C',$$

où C' désignera une seconde constante. Ou bien on remplacera dans l'équation

$$\varphi = C$$

p et q par leurs expressions (8) en $\frac{du}{ds}$, $\frac{dv}{ds}$, ce qui donnera une intégrale première de l'équation des lignes géodésiques, dont on déterminera ensuite un facteur en appliquant le théorème de Jacobi [II, p. 431].

On ne sait pas intégrer d'une manière générale l'équation linéaire (5). Mais on a obtenu des résultats du plus haut intérêt en se donnant *a priori* certaines formes générales de l'intégrale φ que l'on suppose connue, et en se proposant de déterminer l'élément linéaire par la condition que ces formes puissent conduire à une solution complète du problème proposé.

Remarquons d'abord qu'en faisant usage de l'équation (1) on pourra toujours rendre la fonction φ homogène par rapport aux deux variables p et q. Cette transformation est très avantageuse; car alors l'équation de condition (5) aura également son premier membre homogène par rapport aux mêmes variables. Cette équa-

tion sera ainsi réduite à ne contenir que les trois variables u, v, $\frac{p}{q}$, qui peuvent être regardées comme indépendantes; et, par suite, *elle devra avoir lieu identiquement.*

Ainsi nous sommes ramenés à la détermination des intégrales homogènes par rapport à p et à q qui satisfont identiquement à l'équation (5). Il est utile de remarquer que les intégrales de cette nature conservent leur homogénéité et leur degré quand on effectue un changement quelconque de coordonnées.

592. Nous commencerons par les intégrales algébriques et entières ([1]), et nous étudierons en premier lieu le cas où la fonction φ est du premier degré. Supposons que la surface ait été rapportée à des coordonnées symétriques. Alors l'élément linéaire sera défini par la formule

$$ds^2 = 4\lambda\, dx\, dy.$$

L'équation (1) deviendra ici

$$\frac{pq}{\lambda} = 1, \tag{9}$$

et l'on aura

$$\varphi = ap + bq, \tag{10}$$

a et b étant des fonctions inconnues de x et de y. La condition (5) nous donnera

$$\frac{q}{\lambda}\left(p\frac{\partial a}{\partial x} + q\frac{\partial b}{\partial x}\right) + \frac{p}{\lambda}\left(p\frac{\partial a}{\partial y} + q\frac{\partial b}{\partial y}\right) + \frac{apq}{\lambda^2}\frac{\partial \lambda}{\partial x} + \frac{bpq}{\lambda^2}\frac{\partial \lambda}{\partial y} = 0,$$

([1]) Le lecteur reconnaîtra aisément que toute intégrale algébrique et entière, non homogène, conduit à deux intégrales distinctes que l'on obtient en séparant les termes de degré pair par rapport à p et à q des termes de degré impair. Chacune de ces deux intégrales donnera ensuite, par l'emploi de l'équation $\Delta\theta = 1$, une intégrale rationnelle et homogène du même degré.

Dans une Note *Sur les intégrales algébriques des problèmes de Dynamique* insérée, en 1886, au tome CIII des *Comptes rendus,* M. G. Kœnigs a montré que, s'il existe des intégrales algébriques quelconques, il y aura nécessairement des intégrales rationnelles, entières ou fractionnaires. L'étude des cas où il y a des intégrales algébriques irrationnelles se ramène donc à celle des questions que nous allons examiner dans le texte.

et, pour qu'elle soit identiquement vérifiée, il faudra que l'on ait

$$\frac{\partial b}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial(a\lambda)}{\partial x} + \frac{\partial(b\lambda)}{\partial y} = 0,$$

ou encore

$$(11) \qquad b = \mathrm{Y}, \qquad a = \mathrm{X}, \qquad \frac{\partial(\lambda \mathrm{X})}{\partial x} + \frac{\partial(\lambda \mathrm{Y})}{\partial y} = 0,$$

X et Y dépendant respectivement des seules variables x et y.

Or la forme de l'élément linéaire subsiste quand on y effectue une substitution

$$x = \varphi(x_1), \qquad y = \psi(y_1).$$

On reconnaîtra aisément qu'en effectuant ce changement on peut toujours ramener les fonctions X, Y à avoir l'une des valeurs constantes 0 ou 1.

On n'a donc que les deux hypothèses suivantes à examiner :

1° $$a = b = 1,$$
2° $$a = 0, \qquad b = 1.$$

La première nous donne

$$\frac{\partial\lambda}{\partial x} + \frac{\partial\lambda}{\partial y} = 0$$

ou, en intégrant,

$$(12) \qquad \lambda = f(x - y).$$

L'élément linéaire prend la forme

$$(13) \qquad ds^2 = 4f(x - y)\,dx\,dy.$$

La seconde hypothèse donne

$$\frac{\partial\lambda}{\partial y} = 0, \qquad \lambda = f_1(x).$$

L'élément linéaire correspondant

$$ds^2 = 4f_1(x)\,dx\,dy$$

se ramène à celui d'une surface développable par substitution à x de la variable

$$x_1 = 4\int f_1(x)\,dx.$$

On peut donc laisser de côté cette seconde forme de l'élément linéaire, qui devient un cas particulier de la première (13).

Quant à celle-ci, on démontre aisément qu'elle caractérise les surfaces applicables sur une surface de révolution. Posons, en effet,

$$x = \frac{u + iv}{2}, \qquad y = \frac{-u + iv}{2};$$

elle prendra la forme

$$(14) \qquad ds^2 = \varphi(u)(du^2 + dv^2), \qquad \text{où} \qquad \varphi(u) = -f(u),$$

ce qui établit le résultat annoncé. Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant, qui est dû à M. Massieu ([1]).

Les surfaces de révolution et celles qui résultent de leur déformation sont les seules pour lesquelles l'équation différentielle des lignes géodésiques admette une intégrale première linéaire et homogène en $\frac{du}{ds}, \frac{dv}{ds}$.

Quand l'élément linéaire est écrit sous la forme (14), l'équation devient

$$(15) \qquad p^2 + q^2 = \varphi(u);$$

l'intégrale linéaire est alors

$$(16) \qquad q = C.$$

([1]) Massieu (F.), *Sur les intégrales algébriques des problèmes de Mécanique*. Thèse présentée à la Faculté des Sciences de Paris; Paris, 1861. Dans ce travail, l'auteur s'occupe d'une manière générale des problèmes de Mécanique dans lesquels il y a une fonction des forces; et, suivant la voie ouverte par M. J. Bertrand dans un beau Mémoire inséré en 1857 au *Journal de Liouville*, il recherche les intégrales algébriques par rapport aux vitesses.

M. Massieu, après avoir présenté quelques résultats sur la question envisagée dans toute sa généralité, étudie plus spécialement le mouvement d'un point sur une surface et il définit tous les cas dans lesquels il y a une intégrale du premier ou du second degré par rapport aux vitesses. Il suffit de supposer nulle la fonction des forces pour que ces résultats deviennent immédiatement applicables au problème des lignes géodésiques. On pourra consulter aussi le Mémoire de Bour *Sur l'intégration des équations différentielles partielles du premier et du second ordre* (*Journal de l'École Polytechnique*, XXXIX[e] Cahier, p. 149; 1862), où les résultats de M. Massieu se trouvent rappelés. Le Chapitre V de ce Mémoire contient une étude sur l'intégration de l'équation générale des lignes géodésiques que nous aurons à citer plus loin.

On a

$$(17)\qquad \begin{cases} p = \sqrt{\varphi(u) - C^2}, \qquad q = C, \\ \theta = C v + \int \sqrt{\varphi(u) - C^2}\, du, \end{cases}$$

et l'on retrouve ainsi, avec de légers changements de notation, le résultat fourni par la première méthode (n° 580).

593. Nous allons maintenant étudier de la même manière le cas où il y a une intégrale φ du second degré par rapport à p et à q. Posons

$$\varphi = ap^2 + 2bpq + cq^2.$$

La condition (5) nous donnera ici

$$(18)\qquad \begin{cases} \left(p^2 \dfrac{\partial a}{\partial x} + 2pq \dfrac{\partial b}{\partial x} + q^2 \dfrac{\partial c}{\partial x}\right) \dfrac{q}{\lambda} + \left(p^2 \dfrac{\partial a}{\partial y} + 2pq \dfrac{\partial b}{\partial y} + q^2 \dfrac{\partial c}{\partial y}\right) \dfrac{p}{\lambda} \\ \qquad\qquad + \dfrac{2pq}{\lambda^2} \dfrac{\partial \lambda}{\partial x} (ap + bq) + \dfrac{2pq}{\lambda^2} \dfrac{\partial \lambda}{\partial y} (bp + cq) = 0. \end{cases}$$

Égalons à zéro les coefficients des diverses puissances de p et de q. Nous aurons d'abord, en prenant les coefficients de q^3 et de p^3, les deux équations

$$\frac{\partial c}{\partial x} = \frac{\partial a}{\partial y} = 0,$$

qui nous donnent

$$a = f(x), \qquad c = f_1(y).$$

En raisonnant comme dans le cas précédent, on verra que, si l'on a choisi convenablement les coordonnées x, y, on peut toujours supposer, soit

$$c = 1, \qquad a = 1,$$

soit

$$c = 0, \qquad a = 1.$$

Commençons par examiner la première hypothèse. En prenant les coefficients de pq^2 et de p^2q dans l'équation de condition (18), on sera conduit aux deux relations

$$\frac{\partial (b\lambda)}{\partial x} + \frac{\partial \lambda}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial (b\lambda)}{\partial y} + \frac{\partial \lambda}{\partial x} = 0,$$

qui s'intègrent aisément et donnent

$$\lambda = f(x+y) + f_1(x-y),$$
$$b\lambda = f_1(x-y) - f(x+y),$$

f et f_1 désignant deux fonctions arbitraires.

On aura donc pour l'élément linéaire l'expression

$$ds^2 = 4[f(x+y) + f_1(x-y)]\,dx\,dy, \tag{19}$$

et l'intégrale φ deviendra

$$p^2 + q^2 + \frac{2pq}{\lambda}[f_1(x-y) - f(x+y)] = C. \tag{20}$$

Le changement de notations défini par les formules

$$x = u + iv, \qquad y = u - iv$$

ramène l'élément linéaire à la forme de M. Liouville et montre aussi que la solution θ dont les dérivées sont définies par l'équation précédente jointe à l'équation (9) est précisément celle que nous avons employée au n° 583.

Ainsi les surfaces dont l'élément linéaire est réductible à la forme de M. Liouville constituent une première classe pour laquelle le problème des lignes géodésiques admet une intégrale homogène et du second degré par rapport à p et à q (1).

594. Examinons maintenant l'hypothèse

$$a = 1, \qquad c = 0.$$

En opérant comme précédemment, on trouvera les conditions

$$\frac{\partial(b\lambda)}{\partial y} + \frac{\partial\lambda}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial(b\lambda)}{\partial x} = 0,$$

qui donnent

$$\frac{\partial^2\lambda}{\partial x^2} = 0, \qquad \lambda = xY' + Y_1, \qquad b\lambda = -Y,$$

(1) *Voir* les Mémoires déjà cités de Bour et de M. Massieu. Il convient de remarquer que M. Massieu a négligé la seconde hypothèse ($a = 1$, $c = 0$) que nous allons étudier.

Y, Y_1 désignant deux fonctions arbitraires de y. L'élément linéaire aura donc pour expression [1]

$$ds^2 = 4(xY' + Y_1)\,dx\,dy, \tag{21}$$

et l'intégrale du second degré sera

$$p^2 - 2\frac{Y}{\lambda}pq = 2C. \tag{22}$$

On tire de là

$$p^2 = 2Y + 2C, \qquad q = \frac{xY' + Y_1}{\sqrt{2Y+2C}};$$

et, par suite,

$$\theta = x\sqrt{2Y+2C} + \int \frac{Y_1\,dy}{\sqrt{2Y+2C}}. \tag{23}$$

Tel est le second cas dans lequel il y a une intégrale du second degré. Mais il convient de remarquer que la surface correspondante est, en général, imaginaire.

On peut, en effet, supposer ici que les coordonnées symétriques x et y sont imaginaires conjuguées. Pour que l'élément linéaire soit réel, il faut qu'il ne change pas quand on y remplace toutes les imaginaires par leurs conjuguées. Si donc Y_0, Y_1^0 désignent les fonctions imaginaires conjuguées de Y, Y_1, il faudra que l'on ait

$$xY' + Y_1 = yX_0' + X_1^0.$$

Il suit de là que le premier membre doit être bilinéaire par rapport à x et à y. On a donc

$$\lambda = axy + bx + b_0y + h,$$

et la condition qu'il s'agit de vérifier exige que a, h soient réels et b, b_0 imaginaires conjugués. Des transformations simples permettent de ramener la valeur de λ aux deux types suivants

$$\lambda = x + y,$$
$$\lambda = a^2(xy + 1),$$

(1) Cette expression de l'élément s'est présentée à M. Lie dans l'étude d'un problème résolu par M. Dini et sur lequel nous reviendrons au Chapitre suivant.

a étant une constante réelle. Les éléments linéaires correspondants

$$ds^2 = 4(x+y)\,dx\,dy, \tag{24}$$

$$ds^2 = 4a^2(xy+1)\,dx\,dy \tag{25}$$

appartiennent l'un et l'autre à des surfaces applicables sur des surfaces de révolution. On le reconnaît immédiatement en effectuant dans la première formule la substitution

$$x = u + iv, \qquad y = u - iv,$$

et, dans la seconde, la substitution

$$x = ue^{iv}, \qquad y = ue^{-iv}.$$

Remarquons-le, d'ailleurs, alors même que l'élément linéaire défini par la formule (21) appartient à une surface réelle, la valeur correspondante (23) de la solution θ demeure imaginaire, comme on s'en assure aisément en y substituant les valeurs de Y et de Y_1 qui correspondent aux deux formes (24) et (25).

595. Les recherches précédentes conduisent aisément au résultat suivant :

L'élément linéaire d'une surface étant mis sous la forme la plus générale

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2, \tag{26}$$

soit

$$\Delta\theta = ep^2 + 2fpq + gq^2 = 1 \tag{27}$$

l'équation aux dérivées partielles dont dépend la détermination des lignes géodésiques. S'il existe une intégrale du second degré

$$e'p^2 + 2f'pq + g'q^2 = C, \tag{28}$$

il pourra se présenter deux cas distincts.

Lorsque les premiers membres des équations (27) *et* (28) *n'ont pas de facteur linéaire commun de la forme* $\alpha p + \beta q$, *l'élément linéaire de la surface est réductible à la forme de Liouville*

$$ds^2 = (U_1 - V_1)(du_1^2 + dv_1^2),$$

et les fonctions U_1, V_1 *sont, à des facteurs constants près, les racines de l'équation du second degré en* k

$$(f'-kf)^2-(e'-ke)(g'-kg)=0, \tag{29}$$

que l'on obtient en exprimant que la combinaison linéaire

$$(e'-ke)p^2+2(f'-kf)pq+(g'-kg)q^2$$

des premiers membres des équations (27) *et* (28) *est un carré parfait.*

On pourra donc, sans aucune intégration, ramener l'élément linéaire à son expression réduite. Il suffira de choisir pour variables indépendantes des fonctions quelconques des deux racines de l'équation (29) (¹).

Si les premiers membres des équations (27) *et* (28) *ont un facteur commun, l'élément linéaire est réductible à la forme* (21).

Il est aisé de vérifier tous ces résultats avec les variables indépendantes que nous avons choisies; et comme ils sont, par leur nature même, indépendants du choix de ces variables, ils sont ainsi établis dans toute leur généralité.

Si l'on a pu obtenir deux intégrales distinctes du second degré

$$e'p^2+2f'pq+g'q^2, \qquad e''p^2+2f''pq+g''q^2,$$

il est clair qu'on pourra les combiner linéairement et en déduire la nouvelle intégrale

$$(e'+ke'')p^2+2(f'+kf'')pq+(g'+kg'')q^2,$$

k désignant une constante quelconque. A chaque valeur de k correspondra une réduction déterminée de l'élément linéaire à la forme de M. Liouville. Ainsi :

Lorsque l'élément linéaire d'une surface est réductible de deux manières distinctes à la forme de M. Liouville, il est réductible à cette forme d'une infinité de manières différentes.

(¹) Cette conclusion serait toutefois en défaut si l'une des racines se réduisait à une constante; dans ce cas, l'une des fonctions U_1, V_1 se réduirait à une constante et la surface correspondante serait applicable sur une surface de révolution.

Ainsi se trouve expliqué le résultat que nous avions indiqué au n° 413 et sur lequel nous devions revenir. Nous avions, au n° 417, proposé de rechercher les surfaces dont l'élément linéaire est réductible de deux manières différentes à la forme de Liouville.

On voit que cette question peut être considérée comme identique à la suivante : *Rechercher toutes les surfaces, ou plutôt tous les éléments linéaires, pour lesquels le problème des lignes géodésiques admet deux intégrales distinctes du second degré* [1]. Dans le Mémoire que nous avons déjà cité [II, p. 218] M. Lie a fait connaître un certain nombre de solutions de cette question auxquelles on pourra ajouter celle que nous avons déjà donnée au n° 417. Nous nous contenterons de rechercher ici toutes les formes de l'élément linéaire pour lesquelles le problème des lignes géodésiques admet deux intégrales, l'une du premier, l'autre du second degré.

596. Toutes les fois qu'il y a une intégrale du premier degré, la surface est applicable sur une surface de révolution. On peut donc écrire son élément linéaire sous la forme

$$ds^2 = du^2 + F(u)\, dv^2.$$

L'équation aux dérivées partielles à intégrer deviendra ici

$$p^2 + \frac{q^2}{F(u)} = 1. \tag{30}$$

L'intégrale du premier degré sera

$$q = C,$$

et il y a à exprimer qu'il existe une intégrale du second degré

$$\varphi = ep^2 + 2fpq + gq^2,$$

distincte du carré q^2 de l'intégrale linéaire. Pour la commodité des calculs qui suivront, posons

$$\frac{1}{F(u)} = U''. \tag{31}$$

---

[1] Dans ce cas, il suffit d'appliquer les méthodes du n° 591 pour reconnaître que l'équation en termes finis des lignes géodésiques sera du second degré par rapport aux deux constantes arbitraires.

L'équation de condition

$$(\Delta, \varphi) = 0$$

nous donnera alors

$$2p\left(p^2\frac{\partial e}{\partial u} + 2\frac{\partial f}{\partial u}pq + \frac{\partial g}{\partial u}q^2\right)$$
$$+ 2q\,U''\left(\frac{\partial e}{\partial v}p^2 + 2\frac{\partial f}{\partial v}pq + \frac{\partial g}{\partial v}q^2\right) - (2ep + 2fq)q^2\,U''' = 0.$$

En égalant à zéro les coefficients des diverses puissances de q, on obtient le système

$$(32)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial e}{\partial u} = 0,\\ &2\frac{\partial f}{\partial u} + U''\frac{\partial e}{\partial v} = 0,\\ &\frac{\partial g}{\partial u} + 2U''\frac{\partial f}{\partial v} - e\,U''' = 0,\\ &2U''\frac{\partial g}{\partial v} - 2f\,U''' = 0,\end{aligned}\right.$$

que l'on peut intégrer sans difficulté en suivant l'ordre des équations. On trouve ainsi

$$(32)_a\qquad \left\{\begin{aligned} e &= V,\\ 2f &= V_1 - U'V',\\ g &= VU'' - V_1'U' + V''\frac{U'^2}{2} + V_2,\end{aligned}\right.$$

V, V_1, V_2 désignant des fonctions arbitraires de v. En portant les valeurs de f et de g dans la dernière équation (32), on est conduit à la relation

$$(33)\qquad V'(2U''^2 + U'U''') + V'''U'^2U'' - V_1U''' - 2V_1''U'U'' + 2V_2'U'' = 0,$$

qui doit avoir lieu identiquement.

Si l'on donne à v une valeur numérique quelconque, on obtiendra une relation de la forme

$$(34)\qquad a(2U''^2 + U'U''') + bU'^2U'' + cU''' + dU'U'' + eU'' = 0,$$

où a, b, c, d, e seront des constantes, et qui sera une équation différentielle propre à déterminer U. On verra aisément que la fonction U ne peut, si l'on écarte un cas tout à fait exceptionnel qui conduirait aux surfaces à courbure constante, satisfaire à une autre

équation de même forme où les constantes a, b, c, d, e prendraient d'autres valeurs. Il faudra donc que, pour chaque valeur particulière donnée à v, l'équation (33) soit identique à la précédente. On devra donc avoir, pour toute valeur de v,

$$\frac{V'}{a} = \frac{V'''}{b} = \frac{-V_1}{c} = \frac{-2V_1''}{d} = \frac{2V_2'}{e}; \tag{35}$$

et ces équations serviront à déterminer les fonctions V, V_1, V_2.

Comme la dérivée U'' figure seule dans l'expression de l'élément linéaire, on pourra toujours ajouter une constante à U' et disposer de cette constante de manière à annuler le coefficient c dans l'équation (34); alors les relations (35) nous donneront

$$V_1 = 0$$

et, par suite,

$$V_1'' = d = 0.$$

Ainsi on peut toujours, sans diminuer la généralité, introduire l'hypothèse

$$c = d = 0.$$

L'équation (34) devient alors

$$a(2U''^2 + U'U''') + bU'^2U'' + eU''' = 0. \tag{36}$$

Posons

$$\frac{b}{a} = -4m, \qquad \frac{e}{a} = -4n. \tag{37}$$

Alors les équations (35) qui déterminent V et V_2 prendront la forme

$$V' = \frac{V'''}{-4m} = \frac{V_2'}{-2n}, \tag{38}$$

et, en intégrant une première fois, on pourra les remplacer par les suivantes

$$V'' + 4mV = 0, \qquad V_2 = -2nV. \tag{39}$$

On s'assure aisément qu'il est permis, toutes les fois que m n'est pas nul, de négliger les constantes introduites par les intégrations; les conserver, ce serait ajouter à l'intégrale cherchée une fonction

$$A(p^2 + U''q^2) + Bq^2,$$

où A et B désignent deux constantes, et qui peut être négligée.

L'équation en U deviendra maintenant

$$2U''^2 + U'U''' = 4mU'^2U'' + 4nU''.$$

En multipliant par U' et intégrant les deux membres, nous trouvons

$$(40) \qquad U'^2U'' = mU'^4 + 2nU'^2 + m',$$

m' désignant une nouvelle constante. Remplaçons U'' par $\frac{dU'}{du}$, nous aurons du et, par suite,

$$(41) \qquad u = \int \frac{U'^2\, dU'}{mU'^4 + 2nU'^2 + m'}.$$

Il suffit de joindre cette équation à la précédente pour obtenir l'expression de U'' en fonction de u.

L'intégrale cherchée du second degré sera

$$Vp^2 - U'V'pq + \left(VU'' + V''\frac{U'^2}{2} + V_2\right)q^2.$$

ou, en remplaçant V'' et V_2 par leurs valeurs,

$$(42) \qquad Vp^2 - U'V'pq + (VU'' - 2mVU'^2 - 2nV)q^2,$$

la fonction V étant une solution de l'équation

$$(43) \qquad V'' = -4mV.$$

Mais ici se présente un résultat tout à fait inattendu. En prenant successivement

$$V = e^{2v\sqrt{-m}} \qquad \text{et} \qquad V = e^{-2v\sqrt{-m}},$$

on obtient non plus une, mais deux intégrales du second degré

$$(44) \qquad e^{2v\sqrt{-m}}\left[(p - \sqrt{-m}\,U'q)^2 + \frac{m'}{U'^2}q^2\right],$$

$$(45) \qquad e^{-2v\sqrt{-m}}\left[(p + \sqrt{-m}\,U'q)^2 + \frac{m'}{U'^2}q^2\right],$$

auxquelles on peut joindre le carré

$$q^2$$

de l'intégrale linéaire. *Il y a donc ici trois intégrales distinctes du second degré.*

L'équation des lignes géodésiques se déterminera aisément; il suffira d'appliquer ici les remarques du n° 591. Le système (6)

admet les quatre intégrales

$$q = \sqrt{C},$$

$$p^2 + U'' q^2 = 1,$$

$$e^{2v\sqrt{-m}}\left[(p - \sqrt{-m}U'q)^2 + \frac{m'}{U'^2} q^2\right] = C',$$

$$e^{-2v\sqrt{-m}}\left[(p + \sqrt{-m}U'q)^2 + \frac{m'}{U'^2} q^2\right] = C'',$$

qui sont d'ailleurs en nombre trop grand d'une unité. Et, en effet, on reconnaît que l'on peut éliminer entre elles u, v, p, q et que les constantes C, C′, C″ doivent être liées par la relation

$$C'C'' = (1 - 2nC)^2 - 4mm'C^2. \tag{46}$$

Si l'on élimine ensuite p et q, on sera conduit à l'équation en termes finis

$$C' e^{-2v\sqrt{-m}} + C'' e^{2v\sqrt{-m}} = 2 - 4C(mU'^2 + n),$$

qui représentera les lignes géodésiques.

Il est clair que les surfaces remarquables dont l'élément linéaire est défini par les formules (24) et (25) appartiennent à la classe que nous venons de déterminer ([1]).

([1]) La question que nous venons d'étudier a été résolue d'une autre manière par M. L. Raffy dans un travail récemment publié (voir *Comptes rendus*, t. CVIII, p. 493, mars 1889, et *Bulletin des Sciences mathématiques*, t. XIII, 2e série). M. Raffy prend l'élément linéaire de la surface cherchée sous la forme

$$ds^2 = 4\lambda\, dx\, dy$$

et il trouve que λ doit avoir l'une des valeurs suivantes

$$\lambda = \frac{P + Q(e^t + e^{-t})}{(e^t - e^{-t})^2},$$

$$\lambda = P e^t + Q e^{2t},$$

$$\lambda = \frac{P}{t^2} + Q,$$

$$\lambda = t,$$

où P et Q désignent des constantes arbitraires et t la somme $x + y$.

Un calcul auquel le lecteur suppléera aisément permet de reconnaître que cette élégante solution concorde avec celle que nous avions obtenue tout d'abord et qui se trouve développée dans le texte.

CHAPITRE III.

DE LA REPRÉSENTATION GÉODÉSIQUE DE DEUX SURFACES L'UNE SUR L'AUTRE.

Problème de M. Beltrami : déterminer toutes les surfaces qui peuvent être représentées sur le plan de telle manière que les géodésiques correspondent aux droites du plan. — Solution directe et complète de ce problème : les surfaces à courbure constante sont les seules qui puissent être représentées de cette manière sur le plan. — Problème de M. Dini : déterminer tous les couples de surfaces tels que l'on puisse établir entre deux surfaces de chaque couple une correspondance dans laquelle les géodésiques correspondent aux géodésiques. — Solution de M. Dini. — Théorème de M. Tissot. — L'élément linéaire des surfaces cherchées se ramène à la forme de M. Liouville. — Application : propriété remarquable de la transformation homographique. — Solution nouvelle et directe des deux problèmes précédents. Si l'on cherche à déterminer les courbes pour lesquelles l'intégrale $\int f(u, v, v')\,du$ prise entre deux points donnés est maximum ou minimum, on est conduit à une équation différentielle du second ordre définissant les courbes cherchées. — Cette équation peut être considérée comme étant la plus générale du second ordre; et à chaque équation de cet ordre correspondent une infinité de fonctions $f(u, v, v')$. — Détermination effective de ces fonctions quand on sait intégrer l'équation différentielle. — Relations avec la théorie du multiplicateur de Jacobi. — Application à l'équation $v'' = 0$ et aux problèmes de MM. Beltrami et Dini.

---

597. Les résultats que nous avons obtenus dans le Chapitre précédent nous permettent maintenant d'aborder une question très intéressante, qui a été posée et résolue par les travaux de MM. Beltrami et Dini.

Étant donnés une sphère (S) et un plan (P), si, du centre de la sphère, on projette les différents points de cette surface sur le plan (P), on établit ainsi, entre les points de la sphère et ceux du plan, une correspondance dans laquelle à toutes les droites du plan correspondent évidemment des grands cercles de la sphère. En d'autres termes, *les deux surfaces se correspondent, point par point, de telle manière qu'à chaque ligne géodésique de l'une corresponde une ligne géodésique de l'autre.*

Cette remarquable propriété a été depuis longtemps utilisée dans la théorie des Cartes géographiques. Dans l'exposé sommaire que nous avons donné des principes de cette théorie [I, p. 146], nous avons vu que les géomètres s'étaient surtout attachés aux modes de représentation qui conservent les angles et qui assurent la similitude des éléments infiniment petits. Mais on peut rechercher d'autres modes de représentation, et une Carte dans laquelle les lignes géodésiques de la surface seraient représentées par les droites du plan aurait ce grand avantage, signalé par Lagrange (1), que l'on pourrait aisément construire le plus court chemin entre deux points de la surface, puisque ce plus court chemin serait représenté par la droite qui unit sur la Carte les représentations de ces deux points.

Les remarques précédentes ont donc conduit M. Beltrami à se poser le problème suivant (2) :

Étant donnée une surface, peut-on la représenter sur le plan de telle manière que les lignes géodésiques de la surface correspondent aux différentes droites du plan?

---

(1) LAGRANGE, *Sur la construction des Cartes géographiques* (*Nouveaux Mémoires de l'Académie de Berlin*, 1779, et *Œuvres complètes*, t. IV, p. 638). Voici le passage auquel nous faisons allusion :

« Si l'œil est dans le centre du globe, la projection se nomme *centrale*, et elle a la propriété que tous les grands cercles se trouvent représentés par des lignes droites, mais les petits cercles le sont par des cercles ou par des ellipses suivant que leur plan est parallèle ou non au plan de projection. On se sert quelquefois de cette projection pour les mappemondes, et l'on y suppose ordinairement que le plan de projection est parallèle à l'équateur, moyennant quoi tous les cercles de latitude deviennent des cercles de mappemonde; mais elle n'est guère usitée pour les Cartes particulières qui ne représentent qu'une partie de la surface de la Terre; elle l'est davantage pour les Cartes célestes; et c'est, en général, à cette projection que se réduit toute la gnomonique, les lignes horaires d'un cadran quelconque n'étant autre chose que les projections centrales des cercles horaires de la sphère.

» Au reste, des Cartes géographiques construites d'après cette projection auraient le grand avantage que tous les lieux de la Terre qui sont situés dans un même grand cercle du globe se trouveraient placés en ligne droite dans la Carte, en sorte que, pour avoir le plus court chemin d'un lieu de la Terre à l'autre, il n'y aurait qu'à joindre ces deux lieux dans la Carte par une ligne droite. »

(2) BELTRAMI (E.), *Risoluzione del Problema : « Riportare i punti di una superficie sopra un piano in modo che le linee geodetiche vengano rappresentate da linee rette »* (*Annali di Matematica pura ed applicata pubblicati da B. Tortolini,* t. VII, p. 185; 1866).

Soient x et y les coordonnées rectilignes, rectangulaires ou obliques, d'un point du plan, et soient λ, μ les coordonnées curvilignes du point correspondant de la surface. Écrivons les formules

$$x = \theta(\lambda, \mu), \qquad y = \varphi(\lambda, \mu), \tag{1}$$

qui établissent la correspondance entre les points du plan et ceux de la surface. A toute droite du plan, définie par l'équation

$$ax + by + c = 0,$$

correspondra une courbe de la surface définie de même par la relation

$$a\,\theta(\lambda, \mu) + b\,\varphi(\lambda, \mu) + c = 0.$$

Il faudra que cette équation représente une ligne géodésique et, par suite, qu'en y regardant $\frac{a}{c}$, $\frac{b}{c}$ comme des constantes arbitraires, elle donne l'intégrale générale de l'équation différentielle du second ordre des lignes géodésiques. Le problème de M. Beltrami se ramène donc immédiatement au suivant :

Rechercher si l'équation générale des lignes géodésiques peut être mise sous la forme

$$a\theta + b\varphi + c = 0, \tag{2}$$

a, b, c désignant des constantes arbitraires et θ, φ des fonctions des coordonnées curvilignes λ, μ.

598. Pour résoudre cette question, nous remarquerons que l'équation

$$\varphi = \text{const.}$$

définit, d'après les hypothèses précédentes, une famille de lignes géodésiques.

Rapportons les points de la surface au système de coordonnées défini par ces lignes géodésiques et leurs trajectoires orthogonales. On aura, pour l'élément linéaire, l'expression suivante

$$ds^2 = du^2 + C^2\,dv^2, \tag{3}$$

et θ deviendra une certaine fonction $F(u, v)$ de u et de v. En appliquant la formule (8) (n° 514), on trouvera l'équation différen-

tielle suivante des lignes géodésiques

$$v'' = -\frac{2}{C}\frac{\partial C}{\partial u}v' - \frac{1}{C}\frac{\partial C}{\partial v}v'^2 - C\frac{\partial C}{\partial u}v'^3. \tag{4}$$

D'autre part, si l'on élimine les deux constantes $\frac{a}{c}$, $\frac{b}{c}$ entre l'équation (2) et ses deux premières dérivées, on trouvera

$$v'' = \frac{r}{p}v' + \frac{2s}{p}v'^2 + \frac{t}{p}v'^3,$$

p, q, r, s, t désignant, suivant l'usage, les dérivées de $F(u, v)$. Cette équation différentielle, admettant pour intégrale générale l'équation (2), sera nécessairement identique à l'équation (4). On aura donc

$$\frac{r}{p} = -\frac{2}{C}\frac{\partial C}{\partial u}, \qquad \frac{2s}{p} = -\frac{1}{C}\frac{\partial C}{\partial v}, \qquad \frac{t}{p} = -C\frac{\partial C}{\partial u}. \tag{5}$$

Les deux premières conditions s'intègrent aisément et nous donnent

$$pC^2 = V, \qquad p^2 C = U,$$

U et V désignant des fonctions arbitraires de u et de v respectivement. Pour la commodité des calculs, nous changerons la notation et nous écrirons

$$pC^2 = \frac{1}{V^3}, \qquad p^2 C = \frac{1}{U^3}.$$

On déduit de là

$$p = \frac{V}{U^2}, \qquad C = \frac{U}{V^2}, \tag{6}$$

et, par suite, V_1 désignant une nouvelle fonction de v,

$$\theta = F(u, v) = V\int\frac{du}{U^2} + V_1.$$

En portant cette valeur de θ dans la troisième équation (5), on trouve la condition

$$V''\int\frac{du}{U^2} + V''_1 = -\frac{U'}{UV^3}.$$

Cette relation entre des fonctions de u et des fonctions de v devant avoir lieu identiquement, différentions-la par rapport à u.

Nous aurons

$$\frac{V''}{U^2} = -\frac{1}{V^3}\left(\frac{U'}{U}\right)',$$

ou encore

$$V''V^3 = -U^2\left(\frac{U'}{U}\right)'.$$

Les deux membres de cette équation doivent évidemment être constants. On aura donc

$$V''V^3 = -h, \qquad U^2\left(\frac{U'}{U}\right)' = h,$$

h désignant une constante quelconque. La seconde équation s'intègre sans difficulté. On peut l'écrire, en effet, comme il suit

$$\frac{U'}{U}\left(\frac{U'}{U}\right)' = \frac{hU'}{U^3},$$

ce qui donne, en intégrant et en désignant par k une constante nouvelle,

$$\left(\frac{U'}{U}\right)^2 = -\frac{h}{U^2} + k,$$

$$U'^2 = -h + kU^2.$$

On déduit de là par dérivation

$$U'' = kU.$$

Or, si l'on fait usage de la formule (24) [II, 416]

$$\frac{1}{RR'} = -\frac{1}{C}\frac{\partial^2 C}{\partial u^2},$$

qui fait connaître la courbure totale de la surface, on trouve, en y remplaçant C par sa valeur tirée de la seconde équation (6),

$$\frac{1}{RR'} = -\frac{U''}{U} = -k.$$

Ainsi *les seules surfaces qui puissent donner une solution du problème proposé sont celles dont la courbure totale est constante*. Tel est le résultat fondamental obtenu par M. Beltrami.

599. Le lecteur pourra poursuivre et achever les calculs; mais il vaut mieux raisonner de la manière suivante.

Rapportons une surface à courbure constante au système de

coordonnées formé par une famille de lignes géodésiques et leurs trajectoires orthogonales : l'élément linéaire prendra la forme

$$ds^2 = du^2 + C^2 dv^2, \tag{7}$$

et l'on devra avoir

$$-\frac{1}{C}\frac{\partial^2 C}{\partial u^2} = k. \tag{8}$$

Si la courbure k est nulle, C sera de la forme

$$C = Vu + V_1, \tag{9}$$

V et V_1 désignant des fonctions de v. Si la courbure k est positive et a pour valeur $\frac{1}{a^2}$, on aura

$$C = V\sin\frac{u}{a} + V_1\cos\frac{u}{a}. \tag{10}$$

Enfin, si la courbure est négative et égale à $-\frac{1}{a^2}$, on trouvera de même

$$C = V\frac{e^{\frac{u}{a}} - e^{-\frac{u}{a}}}{2} + V_1\frac{e^{\frac{u}{a}} + e^{-\frac{u}{a}}}{2}. \tag{11}$$

Écrivons les expressions correspondantes de l'élément linéaire en changeant dans les deux dernières u en au ; on sera conduit aux trois formes

$$ds^2 = du^2 + (Vu + V_1)^2 dv^2, \tag{12}$$

$$ds^2 = a^2[du^2 + (V\sin u + V_1\cos u)^2 dv^2], \tag{13}$$

$$ds^2 = a^2\left[du^2 + \left(V\frac{e^u - e^{-u}}{2} + V_1\frac{e^u + e^{-u}}{2}\right)^2 dv^2\right], \tag{14}$$

qui caractérisent les surfaces à courbure nulle, positive ou négative. Si nous supposons maintenant que les lignes géodésiques v=const. soient celles qui passent par un point donné de la surface, il faudra que l'on ait, dans les trois cas,

$$C = 0 \quad \text{pour} \quad u = 0.$$

Cela donne la condition

$$V_1 = 0.$$

En choisissant convenablement la coordonnée v, on réduira en-

suite V à l'unité; de sorte que l'élément linéaire se ramènera aux formes suivantes :

$$ds^2 = du^2 + u^2\,dv^2, \tag{15}$$

$$ds^2 = a^2[du^2 + \sin^2 u\,dv^2], \tag{16}$$

$$ds^2 = a^2\left[du^2 + \left(\frac{e^u - e^{-u}}{2}\right)^2 dv^2\right], \tag{17}$$

qui ne contiennent, comme on voit, aucune indéterminée.

L'application des méthodes que nous avons données plus haut (n° 579) dans le cas des surfaces de révolution nous conduira ici sans difficulté à l'équation en termes finis des lignes géodésiques. On trouve ainsi les trois équations

$$\mathrm{A}\,u\cos v + \mathrm{B}\,u\sin v + \mathrm{C} = 0, \tag{18}$$

$$\mathrm{A}\,\mathrm{tang}\,u\cos v + \mathrm{B}\,\mathrm{tang}\,u\sin v + \mathrm{C} = 0, \tag{19}$$

$$\mathrm{A}\,\frac{e^u - e^{-u}}{e^u + e^{-u}}\cos v + \mathrm{B}\,\frac{e^u - e^{-u}}{e^u + e^{-u}}\sin v + \mathrm{C} = 0, \tag{20}$$

qui conviennent respectivement aux éléments linéaires définis par les trois formules (15), (16), (17) et qui, d'ailleurs, donnent immédiatement la solution complète du problème proposé. On voit, en effet, que, si l'on représente l'une quelconque des surfaces sur le plan en prenant pour les coordonnées rectangulaires x et y du point du plan les coefficients de A et de B dans l'une des équations précédentes, les lignes géodésiques de la surface correspondront aux droites du plan.

D'ailleurs, quand on a une telle représentation d'une surface sur un plan, on peut obtenir toutes les autres de la manière la plus simple; car, si P et Q sont les deux points du plan qui correspondent, dans deux représentations distinctes, à un même point M de la surface, la correspondance établie entre P et Q sera telle que les droites correspondront à des droites, et ne sera autre, par conséquent, que la transformation homographique la plus générale. Ainsi, quand on a effectué *une* représentation de la surface considérée sur le plan, on les obtient *toutes* en faisant suivre cette représentation, quelque particulière qu'elle soit, de la transformation homographique la plus générale dans le plan.

Si, à la place des coordonnées u et v, on introduit les coordonnées rectangulaires x et y du point du plan qui correspond de la manière indiquée au point de la surface, on obtient pour les trois

formes de l'élément linéaire les expressions

(21) $$ds^2 = dx^2 + dy^2,$$

(22) $$ds^2 = a^2 \frac{dx^2 + dy^2 + (x\,dy - y\,dx)^2}{(1 + x^2 + y^2)^2},$$

(23) $$ds^2 = a^2 \frac{dx^2 + dy^2 - (x\,dy - y\,dx)^2}{(1 - x^2 - y^2)^2},$$

que nous retrouverons plus loin d'une autre manière et qui ont été signalées par M. Beltrami.

600. Les recherches que nous venons d'exposer conduisaient naturellement au problème suivant :

Étant données deux surfaces quelconques, peut-on les représenter l'une sur l'autre, de telle manière qu'à toute ligne géodésique de l'une corresponde une ligne géodésique de l'autre?

Nous dirons alors que les deux surfaces sont représentées l'une sur l'autre *géodésiquement.*

Cette question, que M. Beltrami avait proposée à la fin de son travail, a été résolue par M. Dini (1) dans un beau Mémoire inséré aux *Annali di Matematica*. La méthode de M. Dini repose sur un élégant théorème de M. Tissot, que l'on peut énoncer comme il suit :

Lorsque deux surfaces se correspondent point par point, il existe sur une des surfaces un système orthogonal, et en général un seul, auquel correspond sur l'autre surface un système orthogonal.

Soient, en effet, M, M_1 deux points correspondants, pris respectivement sur les deux surfaces considérées (S) et (S_1); à toute tangente Mt en M correspond une tangente $M_1 t_1$ en M_1, en ce sens que toute courbe de la première surface tangente en M à Mt a pour homologue une courbe de (S_1) tangente en M_1 à $M_1 t_1$. Il est à peu près évident, et l'on établira aisément qu'à quatre tangentes

(1) Dini (U.), *Sopra un problema che si presenta nella teoria generale delle rappresentazioni geografiche di una superficie su di un' altra* (*Annali di Matematica*, t. III, p. 269; 1869).

Mt correspondent quatre tangentes $M_1 t_1$ de même rapport anharmonique. D'après cela, soient Mi, Mj les deux tangentes de la première surface qui vont rencontrer le cercle de l'infini et Mu, Mv les tangentes qui correspondent aux deux tangentes analogues de (S_1). Deux tangentes rectangulaires de (S) sont conjuguées, comme on sait, par rapport au faisceau des deux droites Mi, Mj. Pour qu'elles correspondent à deux tangentes rectangulaires de (S_1), il faudra encore qu'elles divisent harmoniquement l'angle des deux tangentes Mu, Mv. On aura donc, pour les déterminer, à construire les rayons communs aux deux involutions dont les rayons doubles sont respectivement Mi, Mj et Mu, Mv. Le problème comporte, en général, une seule solution. D'ailleurs si les surfaces sont réelles et si la correspondance, comme il arrive ordinairement, est établie entre des points réels, les rayons doubles des involutions que nous venons de considérer seront imaginaires conjugués et, par suite, *les rayons communs aux deux involutions seront nécessairement réels*.

Considérons sur la surface (S) les courbes qui admettent pour tangente en chaque point l'une des droites que nous venons de construire. Ces courbes formeront un système orthogonal, et ce système sera évidemment le seul auquel correspondra sur (S_1) un système orthogonal.

A cette conclusion il y a deux exceptions : 1° si les deux involutions précédentes ont leurs rayons doubles communs, la correspondance entre (S) et (S_1) aura lieu avec conservation des angles; et, par suite, tout système orthogonal tracé sur l'une des surfaces aura, dans ce cas, pour homologue un système orthogonal tracé sur l'autre; 2° si les deux involutions ont un seul rayon double commun, c'est-à-dire si les lignes de longueur nulle d'une seule famille se correspondent sur les deux surfaces. Alors les deux familles qui composaient le système orthogonal viennent se confondre en une seule, formée de ces lignes de longueur nulle qui se correspondent sur les deux surfaces. Ce cas exceptionnel, sur lequel nous aurons l'occasion de revenir, a été signalé par M. Lie (¹); il ne peut évidemment se présenter lorsque la correspondance a

(¹) *Mathematische Annalen*, t. XX, p. 421, Note I du Mémoire déjà cité : *Untersuchungen über geodätische Curven.*

lieu entre les points réels de deux surfaces réelles. On peut donc énoncer la conclusion suivante :

Lorsqu'on a établi une correspondance entre les points réels de deux surfaces réelles, il existe certainement sur chacune des surfaces un système orthogonal réel admettant pour homologue un système orthogonal. Ce système est unique si la correspondance n'a pas lieu avec conservation des angles.

601. Voici maintenant comment M. Dini a fait usage du théorème précédent. Supposant implicitement que la correspondance établie entre les surfaces (S) et (S_1) a lieu entre des points réels, l'éminent géomètre rapporte ces deux surfaces au système de coordonnées formé par les lignes orthogonales qui se correspondent sur les deux surfaces. Ce système sera unique si la correspondance n'a pas lieu avec similitude des éléments infiniment petits; dans le cas contraire, l'un des systèmes orthogonaux pourrait être choisi arbitrairement. Soient

$$ds^2 = \mathrm{E}\,du^2 + \mathrm{G}\,dv^2, \qquad ds_1^2 = \mathrm{E}_1\,du^2 + \mathrm{G}_1\,dv^2 \tag{24}$$

les expressions des éléments linéaires de (S) et de (S_1). L'équation différentielle des lignes géodésiques de (S) sera (n° 514)

$$\left\{\begin{aligned} &2(du\,d^2v - dv\,d^2u) - \frac{1}{\mathrm{G}}\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial v}du^3 + \left(\frac{2}{\mathrm{G}}\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial u} - \frac{1}{\mathrm{E}}\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial u}\right)du^2\,dv \\ &\qquad - \left(\frac{2}{\mathrm{E}}\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial v} - \frac{1}{\mathrm{G}}\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial v}\right)du\,dv^2 + \frac{1}{\mathrm{E}}\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial u}dv^3 = 0,\end{aligned}\right. \tag{25}$$

et l'on obtiendrait de même celle des lignes géodésiques de (S_1) en remplaçant E, G par E_1, G_1. Pour que les lignes géodésiques se correspondent, il faut et il suffit que les équations différentielles soient identiques. On est ainsi conduit aux conditions

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{1}{\mathrm{G}}\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial v} = \frac{1}{\mathrm{G}_1}\frac{\partial \mathrm{E}_1}{\partial v}, \\ &\frac{2}{\mathrm{G}}\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial u} - \frac{1}{\mathrm{E}}\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial u} = \frac{2}{\mathrm{G}_1}\frac{\partial \mathrm{G}_1}{\partial u} - \frac{1}{\mathrm{E}_1}\frac{\partial \mathrm{E}_1}{\partial u}, \\ &\frac{2}{\mathrm{E}}\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial v} - \frac{1}{\mathrm{G}}\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial v} = \frac{2}{\mathrm{E}_1}\frac{\partial \mathrm{E}_1}{\partial v} - \frac{1}{\mathrm{G}_1}\frac{\partial \mathrm{G}_1}{\partial v}, \\ &\frac{1}{\mathrm{E}}\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial u} = \frac{1}{\mathrm{E}_1}\frac{\partial \mathrm{G}_1}{\partial u},\end{aligned}\right. \tag{26}$$

qui devront avoir lieu identiquement. La seconde et la troisième s'intègrent aisément et peuvent être remplacées par les suivantes

$$\frac{E}{G^2} = \frac{E_1}{G_1^2}\frac{1}{V^3}, \qquad \frac{G}{E^2} = \frac{G_1}{E_1^2}\frac{1}{U^3},$$

où U désigne une fonction de u et V une fonction de v. On en déduit

$$E_1 = \frac{E}{VU^2}, \qquad G_1 = \frac{G}{UV^2}, \tag{27}$$

et il ne restera plus qu'à satisfaire à la première et à la quatrième des relations (26). La substitution des valeurs précédentes de E_1 et de G_1 nous conduit ainsi aux deux équations

$$\begin{cases} \dfrac{\partial E}{\partial v}(U - V) = - V'E, \\ \dfrac{\partial G}{\partial u}(U - V) = U'G, \end{cases} \tag{28}$$

d'où l'on déduit, en intégrant [1],

$$E = U_1^2(U - V), \qquad G = V_1^2(U - V), \tag{29}$$

U_1 désignant une nouvelle fonction de u et V_1 une nouvelle fonction de v.

La question est maintenant résolue. Les éléments linéaires des deux surfaces sont donnés par les formules suivantes :

$$ds^2 = (U - V)(U_1^2\,du^2 + V_1^2\,dv^2), \tag{30}$$

$$ds_1^2 = \left(\frac{1}{V} - \frac{1}{U}\right)\left(\frac{U_1^2\,du^2}{U} + \frac{V_1^2\,dv^2}{V}\right); \tag{31}$$

ils ont l'un et l'autre la forme de Liouville.

Au reste, en appliquant la formule (28) (n° 583), on reconnaît aisément que les lignes géodésiques de l'une et l'autre surface sont représentées par l'équation

$$\int \frac{U_1\,du}{\sqrt{U - a}} - \int \frac{V_1\,dv}{\sqrt{a - V}} = a'. \tag{32}$$

(1) On néglige ici l'hypothèse $V = U =$ const., qui conduirait à deux surfaces homothétiques.

Cette équation ne change pas, en effet, quand on y remplace U, U_1, V, V_1, a, a' par $-\frac{1}{U}$, $\frac{U_1}{\sqrt{U}}$, $-\frac{1}{V}$, $\frac{V_1}{\sqrt{V}}$, $-\frac{1}{a}$, $a'\sqrt{a}$, ce qui revient à passer de (S) à (S_1).

602. Telle est la solution que l'on doit à M. Dini. Elle donne une nouvelle et remarquable propriété des surfaces dont l'élément linéaire est réductible à la forme de Liouville.

Mais il importe d'observer, en outre, qu'à chacune de ces surfaces on peut faire correspondre géodésiquement non pas une seule surface, mais une infinité de telles surfaces. En effet, l'élément linéaire de (S) peut aussi s'écrire

$$(33) \qquad ds^2 = [m(U+h) - m(V+h)]\left[\frac{U_1^2}{m}du^2 + \frac{V_1^2}{m}dv^2\right].$$

La forme primitive est conservée. Mais U, V, U_1, V_1 sont remplacés respectivement par $m(U+h)$, $m(V+h)$, $\frac{U_1}{\sqrt{m}}$, $\frac{V_1}{\sqrt{m}}$. En effectuant ce changement dans l'élément linéaire de (S_1), on aura

$$(34) \qquad ds_1^2 = \frac{1}{m^3}\left(\frac{1}{V+h} - \frac{1}{U+h}\right)\left(\frac{U_1^2\,du^2}{U+h} + \frac{V_1^2\,dv^2}{V+h}\right),$$

et cette expression varie avec les constantes h et m. On pourrait à la rigueur faire abstraction de m dont la variation remplacerait chaque surface par une surface homothétique; mais il n'en est plus de même pour h. A chaque nouvelle valeur de h correspondra un élément linéaire distinct.

603. M. Dini a montré comment on peut déduire de la solution précédente les résultats obtenus en premier lieu par M. Beltrami. Pour ne pas étendre outre mesure cette exposition, nous nous contenterons de la remarque suivante.

Considérons la transformation homographique la plus générale dans le plan. Il résulte du théorème de M. Tissot que, dans cette transformation comme dans toutes les autres, il existera un système orthogonal qui se transformera en un système orthogonal. Et, de plus, les résultats que nous venons d'établir permettent d'affirmer que l'élément linéaire du plan rapporté à ce système sera néces-

sairement de la forme

$$ds^2 = (U - V)(du^2 + dv^2).$$

Or, d'après une proposition établie par M. Liouville (¹) et que le lecteur retrouvera aisément en appliquant les méthodes du n° 413, les seuls systèmes orthogonaux pour lesquels l'élément linéaire du plan prenne la forme précédente sont ceux qui sont formés de deux familles de coniques homofocales et de leurs variétés. De là résulte une propriété de la transformation homographique établie en premier lieu par M. Richelot (²) : *Dans toute transformation de ce genre, il existe un système orthogonal, et un seul, qui demeure orthogonal après la transformation, et ce système est formé de deux familles de coniques homofocales.*

Au reste, cette proposition peut être démontrée de la manière la plus simple par la Géométrie. Soient, en effet, (S) et (S_1) deux figures homographiques dans deux plans différents. Soient A et B les points de (S) qui correspondent aux points à l'infini sur le cercle, I_1 et J_1, de (S_1). Soient de même A_1 et B_1 les points de (S_1) qui correspondent aux points I et J de (S). Les coniques (K) de (S) qui ont les points A et B pour foyers sont inscrites dans le quadrilatère dont les sommets opposés sont A, B et I, J. Elles auront donc pour homologues dans (S_1) des coniques inscrites dans le quadrilatère dont les sommets opposés sont I_1, J_1 et A_1, B_1, c'est-à-dire les coniques (K_1) dont les foyers sont A_1 et B_1. D'ailleurs, d'après le théorème de M. Tissot, les deux familles de courbes que nous venons de définir dans chaque figure sont les seules qui conservent leur orthogonalité après la transformation.

Ce raisonnement s'étend de lui-même à la transformation homographique dans l'espace. Considérons, en effet, dans l'espace deux figures homographiques, et soient A et B les deux coniques qui correspondent au cercle C de l'infini, considéré successivement comme appartenant à chacune des figures. Il est évident que la développable (A, C) circonscrite à A et à C correspondra à la dé-

(¹) Liouville (J.), *Sur quelques cas particuliers où les équations du mouvement d'un point matériel peuvent s'intégrer* (*Journal de Liouville*, t. XI, p. 360; 1846).

(²) Richelot, *Ueber die einfachste Correlation in zwei räumlichen Gebieten* (*Journal de Crelle*, t. LXX, p. 137; 1868).

veloppable (C, B), circonscrite à C et à B. Par suite, au système des surfaces du second degré ayant A pour focale correspondra le système des surfaces de même ordre ayant B pour focale. Il est du reste facile de prouver que le système *triple* orthogonal ainsi formé est le seul qui demeure orthogonal après la transformation. En effet, si l'on se propose de déterminer trois directions passant par un point et telles que les trois directions correspondantes soient rectangulaires, cela revient à trouver un trièdre conjugué à deux cônes de même sommet, et le problème n'a qu'une solution ([1]).

604. Les méthodes que nous avons suivies et qui sont celles de MM. Beltrami et Dini présentent en elles-mêmes un grand intérêt. C'est ce qui nous a déterminé à les reproduire. Mais on peut traiter aussi les questions précédentes en se plaçant à un point de vue plus général, qui permet une étude plus approfondie et plus complète des résultats que nous avons trouvés. C'est ce que nous allons montrer rapidement.

On sait que tous les problèmes du calcul des variations dans lesquels il s'agit de trouver le maximum ou le minimum d'une intégrale simple

$$\int f(u, v, v')\,du \tag{35}$$

conduisent à une équation différentielle du second ordre à laquelle doit satisfaire la fonction v et qui est

$$\frac{\partial f}{\partial v} - \frac{d}{du}\left(\frac{\partial f}{\partial v'}\right) = 0 \tag{36}$$

ou, en développant,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial v'^2} v'' + \frac{\partial^2 f}{\partial v\,\partial v'} v' + \frac{\partial^2 f}{\partial v'\,\partial u} - \frac{\partial f}{\partial v} = 0. \tag{37}$$

Réciproquement, donnons-nous *a priori* une équation différentielle quelconque du second ordre

$$v'' = \varphi(u, v, v'), \tag{38}$$

([1]) Darboux (G.), *Note sur un Mémoire de M. Dini* (*Bulletin des Sciences mathématiques*, t. I, p. 383; 1870).

et proposons-nous de rechercher si elle donne la solution d'un problème de calcul des variations, c'est-à-dire s'il existe des intégrales de la forme (35) pour lesquelles l'équation différentielle (37) soit identique à l'équation donnée (38). Pour qu'il en soit ainsi, il sera nécessaire et suffisant que la valeur de v'' tirée de l'équation (38) et portée dans l'équation (37) donne naissance à une relation qui soit vérifiée pour toutes les valeurs de u, v, v'. On trouve ainsi la condition

$$\frac{\partial^2 f}{\partial v'^2}\varphi + \frac{\partial^2 f}{\partial v\,\partial v'}v' + \frac{\partial^2 f}{\partial v'\,\partial u} - \frac{\partial f}{\partial v} = 0, \tag{39}$$

qui est une équation aux dérivées partielles du second ordre à laquelle doit satisfaire la fonction $f(u, v, v')$ des trois variables u, v, v'. Comme cette équation admet toujours des solutions, on peut énoncer le résultat suivant :

Étant donnée une équation différentielle quelconque du second ordre, elle peut être assimilée d'une infinité de manières différentes aux équations du même ordre qui se présentent dans la recherche du maximum ou du minimum d'une intégrale simple de la forme (35). *En d'autres termes, il existe une infinité de fonctions $f(u, v, v')$ telles que leur intégrale, prise entre deux points quelconques de l'une des courbes intégrales de l'équation considérée, soit maximum ou minimum.*

605. La détermination de la fonction f dépend de l'intégration de l'équation aux dérivées partielles (39). Cette intégration est beaucoup facilitée par les remarques suivantes.

Différentions l'équation (39) par rapport à v'; nous aurons

$$\frac{\partial}{\partial v'}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial v'^2}\varphi\right) + v'\frac{\partial^3 f}{\partial v\,\partial v'^2} + \frac{\partial^3 f}{\partial v'^2\,\partial u} = 0, \tag{40}$$

et cette équation nouvelle, qui est du troisième ordre, se réduit au premier si l'on prend comme inconnue auxiliaire la quantité

$$\mathrm{M} = \frac{\partial^2 f}{\partial v'^2}. \tag{41}$$

On obtient ainsi pour M l'équation linéaire

$$M\frac{\partial\varphi}{\partial v'}+\varphi\frac{\partial M}{\partial v'}+v'\frac{\partial M}{\partial v}+\frac{\partial M}{\partial u}=0. \tag{42}$$

Cette équation définit ce que Jacobi, généralisant une théorie d'Euler, a appelé le multiplicateur du système d'équations différentielles ordinaires [1]

$$\frac{du}{1}=\frac{dv}{v'}=\frac{dv'}{\varphi}.$$

Nous aurions pu d'ailleurs déduire notre théorie des résultats que nous devons sur ce sujet à l'illustre géomètre; mais il nous a semblé préférable de développer tous les raisonnements sans rien emprunter à la théorie du multiplicateur.

Pour obtenir l'intégrale générale de l'équation linéaire (42), il faudra intégrer le système d'équations différentielles ordinaires

$$\frac{du}{1}=\frac{dv}{v'}=\frac{dv'}{\varphi}=\frac{-dM}{M\dfrac{\partial\varphi}{\partial v'}}. \tag{43}$$

Si nous prenons d'abord les équations

$$dv=v'\,du,\qquad dv'=\varphi\,du, \tag{44}$$

obtenues en égalant les trois premiers rapports, elles ne contiennent pas M et, par suite, peuvent être intégrées séparément. D'ailleurs l'élimination de v' conduit à l'équation

$$\frac{d^2v}{du^2}=\varphi\left(u,v,\frac{dv}{du}\right),$$

qui n'est autre que la proposée. Donc les intégrales du système (44) sont les deux intégrales premières

$$\left\{\begin{aligned}\psi(u,v,v')&=\alpha,\\ \psi_1(u,v,v')&=\beta\end{aligned}\right. \tag{45}$$

de l'équation proposée.

Supposons qu'on ait obtenu ces intégrales. En égalant le pre-

---

(1) *Vorlesungen über Dynamik*, Dixième Leçon.

mier et le dernier des rapports (43), on aura

$$\frac{dM}{M} + \frac{\partial\varphi}{\partial v'}\,du = 0.$$

On peut, en tirant v, v' des équations (45), exprimer $\frac{\partial\varphi}{\partial v'}$ en fonction de u. L'équation précédente prend alors la forme

$$\frac{dM}{M} + \theta(u, \alpha, \beta)\,du = 0.$$

Une quadrature nous donnera une relation telle que

$$M\,\sigma(u, \alpha, \beta) = \gamma,$$

γ désignant une nouvelle constante. Si l'on remplace α et β par leurs valeurs (45), on aura la troisième intégrale du système (43) sous la forme

$$M\,\psi_2(u, v, v') = \gamma. \tag{46}$$

Par suite, la solution M la plus générale de l'équation (42) sera déterminée par la formule

$$M\,\psi_2(u, v, v') = \mathcal{F}(\psi, \psi_1), \tag{47}$$

où $\mathcal{F}$ désigne une fonction entièrement arbitraire. Il résulte de là que *le quotient de deux valeurs particulières de* M *sera nécessairement une intégrale première de l'équation proposée.*

La valeur de M une fois obtenue, on déterminera celle de f au moyen de l'équation

$$\frac{\partial^2 f}{\partial v'^2} = M,$$

qui s'intègre par une double quadrature. Désignons par f_0 une solution particulière quelconque de cette équation : la solution la plus générale sera

$$f = f_0 + \lambda(u, v)\,v' + \mu(u, v),$$

λ et μ désignant deux fonctions arbitraires de u et de v. Mais, il importe de le remarquer, cette valeur de f, qui satisfait à l'équation (40) dont elle est la solution la plus générale, ne vérifiera pas nécessairement la véritable équation du problème, c'est-à-dire l'équation (39). On peut affirmer seulement que la valeur précé-

dente de f, substituée dans l'équation (39), rendra son premier membre égal à une fonction de u et de v, puisque la dérivée de ce premier membre par rapport à v' est nulle en vertu de l'équation (40).

Effectuons cette substitution; en désignant par P_0 la fonction de u et de v qui résulte de la substitution de f_0, nous trouverons l'équation

$$P_0 + \frac{\partial \lambda}{\partial u} - \frac{\partial \mu}{\partial v} = 0.$$

Telle est l'unique relation que devront vérifier les fonctions λ, μ. Soit λ_0, μ_0 un système de valeurs de λ, μ satisfaisant à cette équation, système que l'on pourra obtenir, par exemple, en se donnant arbitrairement λ_0 et déterminant μ_0 par une quadrature. Les valeurs les plus générales de λ, μ seront données par les formules

$$\lambda = \lambda_0 + \frac{\partial \theta}{\partial v}, \qquad \mu = \mu_0 + \frac{\partial \theta}{\partial u},$$

θ désignant une fonction quelconque de u et de v. On aura donc l'expression suivante

(48) $$f = f_0 + \lambda_0 v' + \mu_0 + \frac{\partial \theta}{\partial v} v' + \frac{\partial \theta}{\partial u},$$

pour la solution la plus générale de l'équation (39). La présence de la différentielle exacte

$$\frac{\partial \theta}{\partial v} v' + \frac{\partial \theta}{\partial u}$$

s'explique sans difficulté. On sait, en effet, que cette différentielle n'a aucun rôle à jouer et que l'on obtient la même équation différentielle du second ordre en cherchant le minimum ou le maximum de l'une ou l'autre des intégrales

$$\int f\, du, \quad \int (f\, du + d\theta).$$

En résumé, on peut énoncer les résultats suivants :

Toutes les fois que l'on pourra intégrer une équation différentielle du second ordre, on saura déterminer par de

simples quadratures toutes les intégrales

$$\int f(u, v, v')\,du,$$

telles que le problème de calcul des variations qui leur correspond conduise à l'équation différentielle proposée.

Si l'on a obtenu par un procédé quelconque deux fonctions f, f_1 *correspondantes à une même équation différentielle,* $\frac{\partial^2 f}{\partial v'^2}$, $\frac{\partial^2 f_1}{\partial v'^2}$ *seront des solutions de l'équation linéaire en* M (42); *et, par suite, le quotient*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial v'^2} : \frac{\partial^2 f_1}{\partial v'^2}$$

sera une intégrale première de l'équation différentielle proposée (¹).

Nous allons maintenant indiquer quelques applications.

606. Soit d'abord l'équation du second ordre

$$v'' = 0. \tag{49}$$

Les intégrales du système (43) seront ici

$$v' = \alpha, \qquad v - uv' = \beta, \qquad \mathrm{M} = \gamma.$$

Par suite, l'intégrale générale de l'équation linéaire en M sera donnée par la formule

$$\mathrm{M} = \mathfrak{F}(v', v - uv'), \tag{50}$$

et la fonction f la plus générale définie par l'équation (41) aura ici pour expression

$$f = \int_0^{v'} (v' - \alpha)\,\mathfrak{F}(\alpha, v - u\alpha)\,d\alpha + v'\lambda(u, v) + \mu(u, v).$$

(¹) Il résulte même des propositions de Jacobi que, dans ce cas, on pourra obtenir par une quadrature l'intégration complète de l'équation différentielle proposée. Mais la proposition énoncée dans le texte, et qui résulte immédiatement des remarques précédentes, suffit pour l'objet actuel de nos recherches.

L'équation (39) à laquelle f doit satisfaire devient

$$\frac{\partial^2 f}{\partial v\,\partial v'}v' + \frac{\partial^2 f}{\partial u\,\partial v'} - \frac{\partial f}{\partial v} = 0. \tag{51}$$

Si l'on y substitue la valeur précédente de f, on trouve, après quelques réductions, la condition

$$\frac{\partial \lambda}{\partial u} - \frac{\partial \mu}{\partial v} = 0,$$

qui permet d'égaler λ et μ aux dérivées partielles d'une même fonction θ. On a ainsi la valeur définitive de f sous la forme

$$f = \int_0^{v'} (v'-\alpha)\,\mathfrak{F}(\alpha, v-u\alpha)\,d\alpha + \frac{\partial\theta}{\partial v}v' + \frac{\partial\theta}{\partial u}. \tag{52}$$

607. Arrivons maintenant à l'objet que nous avons en vue, et proposons-nous d'abord le problème de M. Beltrami : *Trouver toutes les surfaces qui peuvent être représentées géodésiquement sur le plan.*

Soient x et y les coordonnées rectilignes d'un point du plan. L'équation différentielle des droites sera

$$y'' = 0, \tag{53}$$

et cette équation subsisterait si l'on faisait une transformation homographique quelconque.

Les variables x et y peuvent encore être considérées comme les coordonnées curvilignes du point de la surface cherchée qui correspond au point du plan. Soit alors

$$ds^2 = \mathrm{E}\,dx^2 + 2\mathrm{F}\,dx\,dy + \mathrm{G}\,dy^2$$

l'expression de l'élément linéaire de la surface. D'après la question proposée, il faudra que l'intégrale

$$\int \sqrt{\mathrm{E} + 2\mathrm{F}y' + \mathrm{G}y'^2}\,dx$$

soit rendue minimum par les courbes intégrales de l'équation différentielle

$$y'' = 0,$$

et, par suite, que la fonction

$$f = \sqrt{E + 2Fy' + Gy'^2}$$

satisfasse à l'équation

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} = \mathfrak{F}(y', y - xy'). \tag{54}$$

Or on a

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} = \frac{EG - F^2}{(E + 2Fy' + Gy'^2)^{\frac{3}{2}}};$$

il faudra donc que la fonction

$$\frac{E + 2Fy' + Gy'^2}{(EG - F^2)^{\frac{2}{3}}} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}\right)^{-\frac{2}{3}}$$

dépende exclusivement de y' et de $y - xy'$. Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit, on le reconnaît aisément, que l'on ait

$$\frac{E + 2Fy' + Gy'^2}{(EG - F^2)^{\frac{2}{3}}} = \Phi(y', y - xy'), \tag{55}$$

Φ désignant la fonction la plus générale, entière et du second degré par rapport aux variables y', $y - xy'$ (¹).

Ordonnons la fonction Φ par rapport aux puissances de y', et soit

$$\Phi = A + 2By' + Cy'^2, \tag{56}$$

A, B, C étant des fonctions de x et de y. L'équation (55) nous donnera

$$\frac{E}{(EG - F^2)^{\frac{2}{3}}} = A, \qquad \frac{F}{(EG - F^2)^{\frac{2}{3}}} = B, \qquad \frac{G}{(EG - F^2)^{\frac{2}{3}}} = C;$$

(¹) En effet, en prenant les dérivées troisièmes des deux membres par rapport à y', on a

$$0 = \frac{\partial^3 \Phi}{\partial y'^3} - 3x \frac{\partial^3 \Phi}{\partial y\, \partial y'^2} + 3x^2 \frac{\partial^3 \Phi}{\partial y^2\, \partial y'} - x^3 \frac{\partial^3 \Phi}{\partial y^3},$$

et comme les trois variables y', $y - xy'$ et x sont indépendantes, cette équation ne peut avoir lieu que si toutes les dérivées troisièmes de Φ sont nulles, ce qui entraîne le résultat donné dans le texte.

et de là on déduit

$$(\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2)^{-\frac{1}{3}} = \mathrm{AC}-\mathrm{B}^2,$$

$$\mathrm{E} = \frac{\mathrm{A}}{(\mathrm{AC}-\mathrm{B}^2)^2}, \qquad \mathrm{F} = \frac{\mathrm{B}}{(\mathrm{AC}-\mathrm{B}^2)^2}, \qquad \mathrm{G} = \frac{\mathrm{C}}{(\mathrm{AC}-\mathrm{B}^2)^2}.$$

Par suite la valeur de f sera

$$(57) \qquad f = \frac{\sqrt{\Phi(y', y-xy')}}{\mathrm{AC}-\mathrm{B}^2},$$

et l'on pourra vérifier que cette valeur satisfait effectivement à l'équation du problème, qui est l'équation (51) où l'on remplacerait u et v par x et y.

Posons

$$\Phi(y', y-xy')\, dx^2 = \Psi(dx, dy, y\,dx - x\,dy);$$

Ψ sera une fonction homogène et du second degré des trois variables dont elle dépend, et l'on aura, pour l'élément linéaire de la surface cherchée, l'expression

$$(58) \qquad ds^2 = \frac{\Psi(dx, dy, y\,dx - x\,dy)}{(\mathrm{AC}-\mathrm{B}^2)^2}.$$

On peut interpréter comme il suit les résultats obtenus.

Les lignes de longueur nulle de la surface sont définies par l'équation différentielle

$$\Phi(y', y-xy') = 0,$$

qui est une équation de Clairaut et qu'on intégrera en supposant y' constante. Dans le plan, y' et $y-xy'$ peuvent être considérées comme les coordonnées d'une droite dont le coefficient angulaire serait y'. L'équation précédente définit donc, en coordonnées tangentielles, une conique quelconque et le dénominateur $\mathrm{AC}-\mathrm{B}^2$ égalé à zéro donnera l'équation en coordonnées ponctuelles de la même conique. Il suit de là que les lignes de longueur nulle de la surface correspondent, dans le plan, aux droites qui sont tangentes à cette conique.

Nous avons déjà rappelé que l'équation (53) se conserve lorsqu'on effectue une transformation homographique. En s'appuyant

sur cette remarquable propriété, on peut classer très simplement les résultats obtenus :

1° Si la fonction Φ se décompose en deux facteurs, la conique se réduit à deux points, nécessairement distincts puisque l'élément linéaire ne peut être un carré parfait. Amenons, par une homographie, ces deux points à coïncider avec les deux points à l'infini sur le cercle. On aura alors

$$\Phi = 1 + y'^2, \tag{59}$$

et la forme correspondante de l'élément linéaire sera

$$ds^2 = dx^2 + dy^2. \tag{60}$$

La surface obtenue sera plane ou développable.

2° Si la fonction Φ est indécomposable, on peut toujours la ramener par une transformation homographique, et même d'une infinité de manières, à la forme

$$\Phi = a^2(1 + y'^2) \pm (y - xy')^2, \tag{61}$$

ce qui revient à supposer que la conique est un cercle, réel ou imaginaire, concentrique à l'origine. On trouve alors

$$ds^2 = \frac{a^2(dx^2 + dy^2) \pm (x\,dy - y\,dx)^2}{(x^2 + y^2 \pm a^2)^2}. \tag{62}$$

Ces formes de l'élément linéaire sont identiques, aux notations près, à celles que nous avons déjà obtenues plus haut, au n° 599. Nous reviendrons d'ailleurs sur ce sujet lorsque nous nous occuperons de la Géométrie non euclidienne et des surfaces à courbure constante.

608. Considérons maintenant le problème de M. Dini et proposons-nous, d'une manière générale, de trouver deux surfaces qui puissent être représentées géodésiquement l'une sur l'autre.

Soient

$$\begin{aligned} ds^2 &= E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2, \\ ds_1^2 &= E_1\,du^2 + 2F_1\,du\,dv + G_1\,dv^2 \end{aligned}$$

les éléments linéaires de ces deux surfaces. Si l'on pose

$$\begin{aligned} f &= \sqrt{E + 2Fv' + Gv'^2}, \\ f_1 &= \sqrt{E_1 + 2F_1 v' + G_1 v'^2}, \end{aligned}$$

on peut dire que la même équation différentielle définit les courbes pour lesquelles l'une ou l'autre des deux intégrales

$$\int f\,du, \quad \int f_1\,du$$

est minimum. Par conséquent, d'après la proposition établie plus haut, cette équation différentielle, qui est celle des lignes géodésiques de la première surface, devra admettre l'intégrale première

$$\frac{\partial^2 f}{\partial v'^2} : \frac{\partial^2 f_1}{\partial v'^2} = \text{const.}$$

En faisant le calcul, on trouve

$$\frac{EG - F^2}{E_1 G_1 - F_1^2}\left(\frac{E_1 + 2F_1 v' + G_1 v'^2}{E + 2F v' + G v'^2}\right)^{\frac{3}{2}} = \text{const.},$$

ou, en élevant les deux membres à la puissance $\frac{2}{3}$,

$$\left(\frac{EG - F^2}{E_1 G_1 - F_1^2}\right)^{\frac{2}{3}} \frac{E_1 + 2F_1 v' + G_1 v'^2}{E + 2F v' + G v'^2} = \text{const.}$$

On peut mettre cette équation sous la forme

$$(63) \qquad \left(\frac{EG - F^2}{E_1 G_1 - F_1^2}\right)^{\frac{2}{3}} \left(E_1 \frac{du^2}{ds^2} + 2F_1 \frac{du\,dv}{ds^2} + G_1 \frac{dv^2}{ds^2}\right) = \text{const.},$$

qui donne immédiatement le résultat suivant :

Si une surface peut être représentée géodésiquement sur une autre surface, l'équation différentielle de ses lignes géodésiques doit admettre une intégrale première homogène et du second degré par rapport à $\frac{du}{ds}$, $\frac{dv}{ds}$.

609. Nous sommes ainsi ramené à un problème que nous avons traité dans le Chapitre précédent; et il n'est pas difficile de reconnaître que la condition précédente, qui est nécessaire, est aussi suffisante.

En effet, elle ne peut être remplie, nous l'avons vu, que dans les deux cas suivants :

1° L'élément linéaire est réductible à la forme de Liouville

$$(64) \qquad ds^2 = (U - V)(U_1^2\,du^2 + V_1^2\,dv^2).$$

Alors l'équation des lignes géodésiques est

$$\frac{U_1^2\,du^2}{U-a} = \frac{V_1^2\,dv^2}{a-V}$$

et, en résolvant par rapport à la constante a, on a l'intégrale première du second degré

$$(65)\qquad (U-V)\frac{U_1^2 V\,du^2 + V_1^2 U\,dv^2}{ds^2} = a,$$

qui est bien de la forme (63). En identifiant les premiers membres des deux équations, on obtient les relations

$$F_1 = 0,$$

$$\left[\frac{(U-V)^2 U_1^2 V_1^2}{E_1 G_1}\right]^{\frac{2}{3}} E_1 = (U-V) U_1^2 V,$$

$$\left[\frac{(U-V)^2 U_1^2 V_1^2}{E_1 G_1}\right]^{\frac{2}{3}} G_1 = (U-V) V_1^2 U;$$

d'où l'on déduit

$$E_1 = \left(\frac{1}{V} - \frac{1}{U}\right)\frac{U_1^2}{U}, \qquad G_1 = \left(\frac{1}{V} - \frac{1}{U}\right)\frac{V_1^2}{V}.$$

La seconde surface aura donc pour élément linéaire

$$(66)\qquad ds^2 = \left(\frac{1}{V} - \frac{1}{U}\right)\left[\frac{U_1^2\,du^2}{U} + \frac{V_1^2\,dv^2}{V}\right],$$

ce qui s'accorde bien avec les résultats obtenus au n° 601. L'élément linéaire avec deux constantes, donné par la formule (34), correspond à la forme plus générale

$$m(a+h) = m(U-V)\left[U_1^2(V+h)\frac{du^2}{ds^2} + V_1^2(U+h)\frac{dv^2}{ds^2}\right],$$

que l'on peut donner à l'intégrale du second degré (65).

2° Il y a encore une intégrale du second degré quand l'élément linéaire est de la forme

$$(67)\qquad ds^2 = 4(xY' + Y_1)\,dx\,dy,$$

donnée au n° 594. L'équation des lignes géodésiques admet alors l'intégrale première

$$-2C = 2Y - (xY' + Y_1)\frac{dy}{dx}.$$

On peut l'écrire sous la forme

$$-\frac{C}{2} = 2(xY' + Y_1)\frac{Y\,dx\,dy}{ds^2} - (xY' + Y_1)^2\frac{dy^2}{ds^2},$$

qui est bien du second degré par rapport aux dérivées $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$.

En appliquant la même méthode que dans le cas précédent, on obtiendra l'élément linéaire ds_1 de la surface correspondante par la formule

$$ds_1^2 = 2(xY' + Y_1)\frac{dx\,dy}{Y^3} - \frac{(xY' + Y_1)^2}{Y^4}dy^2. \tag{68}$$

Ce cas exceptionnel a été signalé, nous l'avons déjà dit, par M. Lie. Il échappe à la méthode de M. Dini, parce que la correspondance établie entre les deux surfaces est telle que le théorème de M. Tissot cesse d'être applicable. Nous rencontrons ici, en effet, le cas d'exception que nous avons signalé, où une des deux familles de lignes de longueur nulle de la première surface admet pour homologue une famille de lignes de longueur nulle de la seconde. La correspondance étant imaginaire, nous nous contenterons des indications précédentes.

CHAPITRE IV.

INTÉGRALES HOMOGÈNES DE DEGRÉ SUPÉRIEUR ET INTÉGRALES D'UNE FORME DÉTERMINÉE.

Division des intégrales en classes d'après le nombre de leurs facteurs linéaires distincts. — Équations aux dérivées partielles par lesquelles on exprime qu'il y a une intégrale d'une forme déterminée. — Application au cas où l'élément linéaire est exprimé au moyen des coordonnées symétriques. — Équations générales. — Première application; intégrale fractionnaire dont les deux termes sont linéaires par rapport à p et à q; la valeur correspondante de λ est l'intégrale générale de l'équation $E\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$; les solutions homogènes de cette équation fournissent l'élément linéaire de certaines surfaces spirales que l'on peut déterminer par des quadratures. — Intégrale à deux facteurs distincts; première méthode. — Un cas particulier de l'intégrale à trois facteurs. — Intégrale à deux facteurs distincts; réduction du problème à l'intégration d'une équation linéaire qui admet un nombre illimité de solutions homogènes.

---

610. Après avoir fait une étude approfondie du cas où le problème des lignes géodésiques admet des intégrales du premier et du second degré, nous allons indiquer les résultats obtenus par Bour et les géomètres qui l'ont suivi en ce qui concerne les intégrales de degré supérieur. Dans le Mémoire que nous avons cité plus haut, Bour avait considéré les intégrales entières et les avait classées d'après leur degré. M. Bonnet, dans des recherches restées inédites, a considéré, le premier, des intégrales fractionnaires [1].

---

[1] L'éminent géomètre a exposé ces recherches dans un Cours fait à la Sorbonne vers 1873. Considérant, en premier lieu, le cas où il existe une intégrale fractionnaire dont les deux termes sont du premier degré par rapport à p et à q, il a montré que, dans ce cas, on peut déterminer la valeur la plus générale de λ (l'élément linéaire étant défini par la formule $ds^2 = 4\lambda\, dx\, dy$) et qu'il existe même certaines valeurs particulières de λ pour lesquelles on peut obtenir des surfaces admettant cet élément linéaire. Nous démontrerons plus loin ces résultats par une méthode nouvelle. M. O. Bonnet a dit aussi quelques mots du cas où il existe une intégrale du troisième degré admettant un facteur double.

Enfin, dans une série de Communications insérées en 1877 au tome LXXXV des *Comptes rendus,* M. Maurice Lévy a mis en évidence ce fait intéressant qu'au lieu de classer les intégrales homogènes $\varphi(p, q, u, v)$ d'après leur degré par rapport à p et à q, il vaut mieux les classer d'après le nombre des facteurs linéaires distincts dans lesquels on peut les décomposer; c'est-à-dire que, si l'on pose

$$\varphi(p, q, u, v) = \theta(u, v) \prod_{i=1}^{i=n} (p - a_i q)^{\alpha_i}, \tag{1}$$

il conviendra de réunir dans une même recherche toutes les intégrales pour lesquelles le nombre n des facteurs est le même, les exposants constants α_i pouvant d'ailleurs changer quand on passe d'une des intégrales à une autre de la même classe. Comme il est permis de donner à ces exposants des valeurs négatives, la recherche ainsi entendue comprendra les intégrales fractionnaires aussi bien que les intégrales entières; et, de plus, si les intégrales sont entières, leur degré pourra prendre des valeurs quelconques sans que le nombre de leurs facteurs linéaires distincts soit changé.

611. Nous commencerons en indiquant une forme remarquable que l'on peut donner aux intégrales cherchées. Nous avons vu (nº 590) qu'elles doivent vérifier identiquement l'équation

$$(\Delta, \varphi) = 0. \tag{2}$$

Or si l'on pose, pour abréger,

$$z_i = p - a_i q,$$

on a

$$\varphi = \theta \prod_{i=1}^{i=n} z_i^{\alpha_i}, \tag{3}$$

et un calcul facile permet de mettre l'équation de condition sous la forme

$$(\Delta, \varphi) = \frac{\varphi}{\theta}(\Delta, \theta) + \sum \frac{\alpha_i \varphi}{z_i}(\Delta, z_i) = 0. \tag{4}$$

Tous les termes du second membre contiennent en évidence le

facteur $z_i^{\alpha_i}$, excepté le suivant

$$\frac{\alpha_i \varphi}{z_i}(\Delta, z_i),$$

qui paraît contenir le facteur z_i seulement à la puissance $\alpha_i - 1$. Il faudra donc, pour que l'équation soit vérifiée, que l'expression (Δ, z_i), qui est du second degré par rapport à p et à q, soit divisible par le facteur z_i et, par suite, que l'on ait

$$(\Delta, z_i) = 0,$$

lorsque p et q satisferont à l'équation

$$z_i = p - a_i q = 0.$$

Cette condition s'interprète aisément : elle indique que l'on peut trouver une fonction θ_i, solution commune des deux équations

$$\Delta\theta = \text{const.}, \qquad \frac{\partial\theta}{\partial u} = a_i \frac{\partial\theta}{\partial v}.$$

En multipliant cette fonction par un facteur constant convenable, on peut toujours supposer qu'elle est solution de l'une des équations

$$\Delta\theta = 1 \qquad \text{ou} \qquad \Delta\theta = 0,$$

et, si l'on désigne ses dérivées par p_i et q_i, on aura

$$a_i = \frac{p_i}{q_i}.$$

Remplaçant a_i par cette valeur dans l'expression de φ, on reconnaît qu'on peut donner aux intégrales cherchées la forme suivante

$$\varphi = f(u, v) \prod_{i=1}^{i=n} (p q_i - q p_i)^{\alpha_i}, \tag{5}$$

où p_i, q_i désignent les dérivées d'une fonction θ_i, solution particulière de l'une des équations

$$\Delta\theta_i = 1 \qquad \text{ou} \qquad \Delta\theta_i = 0. \tag{6}$$

Cette expression, que nous adopterons dans la suite, simplifie beaucoup les calculs. Il résulte de la formule (4) que, dans tous

les cas, l'équation de condition

$$(\Delta, \varphi) = 0 \tag{7}$$

se ramène alors à une équation homogène et du premier degré par rapport à p et à q. En égalant à zéro les coefficients de p et de q, on aura donc seulement deux équations de condition. Si l'on ajoute à ces deux équations les n relations (6), on aura exprimé toutes les conditions du problème et écrit toutes les conditions qui doivent être vérifiées par les fonctions f, θ_i et les coefficients E, F, G de l'élément linéaire.

612. Pour développer les calculs, supposons que l'on ait choisi des coordonnées symétriques. L'élément linéaire aura pour expression

$$ds^2 = 4\lambda\, dx\, dy; \tag{8}$$

l'équation à intégrer deviendra

$$pq = \lambda, \tag{9}$$

et φ prendra la forme suivante

$$\varphi = f(x, y) p^\alpha q^\beta (pq_1 - qp_1)^{m_1} \ldots (pq_k - qp_k)^{m_k}. \tag{10}$$

Les équations (6) deviendront ici

$$p_1 q_1 = p_2 q_2 = \ldots = p_k q_k = \lambda. \tag{11}$$

L'équation (7) deviendra, de même,

$$\begin{aligned} &\frac{1}{p}\left[\frac{\partial \log f}{\partial x} + \sum m_i \frac{ps_i - qr_i}{pq_i - qp_i}\right] + \frac{1}{q}\left[\frac{\partial \log f}{\partial y} + \sum m_i \frac{pt_i - qs_i}{pq_i - qp_i}\right] \\ &\quad + \left[\frac{\alpha}{p} + \sum \frac{m_i q_i}{pq_i - qp_i}\right] \frac{\partial \log \lambda}{\partial x} + \left[\frac{\beta}{q} - \sum \frac{m_i p_i}{pq_i - qp_i}\right] \frac{\partial \log \lambda}{\partial y} = 0. \end{aligned}$$

Effectuons les réductions en tenant compte des équations (11) et de leurs dérivées; nous trouverons

$$\begin{aligned} &q\left[\frac{\partial \log f}{\partial x} + \alpha \frac{\partial \log \lambda}{\partial x} + \sum \frac{m_i r_i}{p_i}\right] \\ &+ p\left[\frac{\partial \log f}{\partial y} + \beta \frac{\partial \log \lambda}{\partial y} + \sum \frac{m_i t_i}{q_i}\right] = 0. \end{aligned}$$

En égalant à zéro les coefficients de p et de q, on est conduit

aux deux équations

$$\frac{\partial \log f}{\partial x} + \alpha \frac{\partial \log \lambda}{\partial x} + \sum \frac{m_i r_i}{p_i} = 0,$$
$$\frac{\partial \log f}{\partial y} + \beta \frac{\partial \log \lambda}{\partial y} + \sum m_i \frac{t_i}{q_i} = 0,$$

que l'on peut intégrer immédiatement et remplacer par les suivantes

$$(12) \qquad \begin{cases} f \lambda^\alpha p_1^{m_1} p_2^{m_2} \dots p_k^{m_k} = Y, \\ f \lambda^\beta q_1^{m_1} q_2^{m_2} \dots q_k^{m_k} = X, \end{cases}$$

où X et Y désignent des fonctions arbitraires dépendant respectivement de x et de y; et il ne reste plus qu'à trouver les solutions les plus générales du système des équations (11) et (12). On a ainsi $k+2$ équations contenant $k+2$ fonctions inconnues : f, λ et les k fonctions θ_i.

Posons

$$(13) \qquad \begin{cases} s = m_1 + \dots + m_k + \alpha - \beta, \\ s' = m_1 + \dots + m_k + \beta - \alpha. \end{cases}$$

Nous allons montrer que l'on peut, en choisissant convenablement les coordonnées symétriques, réduire à l'unité la fonction X si la somme s n'est pas nulle, et la fonction Y s'il en est de même de la somme s'.

Supposons, en effet, que l'on change la coordonnée x et qu'on la remplace par une fonction de x

$$(14) \qquad x_1 = \varphi(x).$$

Il faudra remplacer λ par $\lambda \varphi'(x)$, p par $p\varphi'(x)$, p_i par $p_i\varphi'(x)$, et, par suite, f par $f[\varphi'(x)]^{-s-\beta}$, afin que l'expression de φ définie par la formule (10) ne soit pas changée. La première des équations (12) ne sera pas altérée, mais la seconde sera remplacée par une équation toute semblable où figurerait dans le second membre, à la place de X, la nouvelle fonction

$$(15) \qquad X_1 = X[\varphi'(x)]^s = X\left(\frac{dx_1}{dx}\right)^s.$$

Toutes les fois que s ne sera pas nul, il est clair que l'on pourra choisir pour x_1 une fonction de x telle que la nouvelle valeur X_1

de X se réduise à l'unité. On démontrera de même que, si s' n'est pas nul, on peut réduire Y à l'unité.

Si la somme s est nulle, la fonction X demeure toujours la même; mais le changement de variable permet, si elle n'est pas constante, de la réduire à telle forme que l'on voudra, par exemple à x ou à $\frac{1}{x}$. Nous aurons à faire usage de cette remarque au numéro suivant.

Nous ne poursuivrons pas davantage l'étude de la méthode générale, et nous nous attacherons de préférence aux exemples particuliers suivants, dans lesquels on peut achever les intégrations.

613. Supposons d'abord que l'on prenne

$$k = 2, \qquad \alpha = \beta = 0, \qquad m_1 = -m_2 = 1. \tag{16}$$

On aura

$$\varphi = f\frac{pq_1 - qp_1}{pq_2 - qp_2}. \tag{17}$$

L'intégrale φ est fractionnaire et linéaire. C'est le cas considéré par M. O. Bonnet. Les équations (12) deviennent alors

$$f\frac{p_1}{p_2} = \text{Y}, \qquad f\frac{q_1}{q_2} = \text{X}. \tag{18}$$

Elles donnent, par suite,

$$\left\{\begin{aligned} &f^2 = \text{XY}, && \lambda = p_1 q_1, \\ &p_2 = p_1\sqrt{\frac{\text{X}}{\text{Y}}}, && q_2 = q_1\sqrt{\frac{\text{Y}}{\text{X}}}. \end{aligned}\right. \tag{19}$$

Si les fonctions X et Y se réduisent l'une et l'autre à des constantes, on reconnaîtra aisément que la surface est développable. Écartons ce cas exceptionnel; il n'y aura à examiner que les deux hypothèses suivantes :

1° Une seule des fonctions, X par exemple, se réduit à une constante, l'autre dépendant réellement de y. Ce fait exceptionnel ne peut se présenter que pour des surfaces imaginaires. Un calcul que nous omettons conduit aux surfaces, déjà considérées au

n° 594, dont l'élément linéaire est réductible à la forme

$$ds^2 = 4(x\mathrm{Y}' + \mathrm{Y}_1)\,dx\,dy.$$

L'intégrale linéaire et fractionnaire correspondante à cette forme n'est autre que l'intégrale (22) du n° 594 dont le premier membre serait divisé par $\frac{pq}{\lambda}$. On trouve ainsi

$$\varphi = \lambda\frac{p}{q} - 2\mathrm{Y}$$

ou, plus généralement,

$$\varphi = \frac{\lambda p - 2\mathrm{Y}q + m'q}{\lambda p - 2\mathrm{Y}q + mq},$$

m, m' désignant des constantes quelconques.

2° Si X et Y sont de véritables fonctions, et non plus des constantes, on pourra toujours, en choisissant convenablement les coordonnées symétriques, les réduire aux formes suivantes

$$\mathrm{X} = \frac{1}{x}, \qquad \mathrm{Y} = \frac{1}{y}. \tag{20}$$

On aura alors

$$p_2 = p_1\sqrt{\frac{y}{x}}, \qquad q_2 = q_1\sqrt{\frac{x}{y}}. \tag{21}$$

L'élimination de θ_2 nous conduira à l'équation

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(p_1\sqrt{\frac{y}{x}}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(q_1\sqrt{\frac{x}{y}}\right),$$

dont le développement donne

$$s_1(x-y) - \frac{1}{2}p_1 + \frac{1}{2}q_1 = 0. \tag{22}$$

Nous retrouvons l'équation $\mathrm{E}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ dont nous avons déjà donné l'intégrale au Chapitre III du Livre IV [II, p. 69].

Si l'on substitue les valeurs de f, p_2 et q_2 dans l'intégrale (17), elle devient

$$\varphi = \frac{pq_1 - qp_1}{pq_1x - qp_1y}.$$

Si l'on tire p et q des équations

$$pq = \lambda = p_1 q_1, \qquad \varphi = \frac{1}{C},$$

où C désigne une constante, on aura

$$p = p_1\sqrt{\frac{y - C}{x - C}}, \qquad q = q_1\sqrt{\frac{x - C}{y - C}}.$$

Si donc on pose

$$\theta = \int\left(p_1\sqrt{\frac{y - C}{x - C}}\,dx + q_1\sqrt{\frac{x - C}{y - C}}\,dy\right),$$

l'équation des géodésiques sera

$$\frac{\partial\theta}{\partial C} = C'.$$

Tout se ramène, on le voit, à l'intégration de l'équation (22).

614. L'intégrale générale de cette équation est de forme très compliquée; mais nous avons indiqué les moyens d'obtenir un nombre illimité d'intégrales particulières très simples.

Par exemple, les intégrales homogènes de tous les degrés, définies au n° 347 [II, p. 57], peuvent être utilisées et conduisent à des éléments linéaires pour lesquels λ est une fonction homogène de x et de y. Ces intégrales homogènes offrent de l'intérêt parce qu'on peut alors déterminer non seulement l'élément linéaire, mais *aussi certaines surfaces qui admettent cet élément linéaire.*

Cela résulte du théorème suivant :

Toutes les fois que, dans l'élément linéaire défini par la formule

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2,$$

E, F, G *sont des fonctions homogènes du même degré* m, *cet élément linéaire convient à une infinité de surfaces que l'on pourra déterminer par des quadratures. Ce sont des surfaces spirales* [I, p. 107] *si* m *est différent de* -2, *et des hélicoïdes ou des surfaces de révolution si* $m = -2$.

Si l'on fait, en effet, la substitution

$$u = e^{v'}, \qquad \frac{u}{v} = e^{u'}, \tag{23}$$

l'élément linéaire prend la forme

$$ds^2 = e^{(m+2)v''}[A\, du'^2 + 2B\, du'\, dv' + C\, dv'^2], \tag{24}$$

où A, B, C sont des fonctions de u', et qui conduira aisément au théorème précédent si on la rapproche des résultats donnés au Livre I, Chapitre IX [I, p. 109].

615. Envisageons maintenant le cas plus général caractérisé par les hypothèses suivantes

$$\alpha = \beta = m_3 = m_4 = \ldots = 0, \tag{25}$$

m_1 et m_2 étant quelconques. En élevant l'intégrale à une puissance convenable, on ramènera m_1 à l'unité. Nous poserons, pour la commodité des calculs,

$$m_2 = 2m - 1.$$

Les sommes s et s', définies par les formules (13), ne seront pas nulles ici et l'on pourra, par suite, réduire X et Y à l'unité. Les deux équations (12) nous donneront alors

$$f p_1 p_2^{2m-1} = 1, \qquad f q_1 q_2^{2m-1} = 1. \tag{26}$$

On tire de là en multipliant

$$f^2 \lambda^{2m} = 1$$

et, par suite,

$$p_1 = \lambda^m p_2^{1-2m}, \qquad q_1 = \lambda^m q_2^{1-2m};$$

ou, en remplaçant λ par sa valeur $p_2 q_2$,

$$p_1 = p_2^{1-m} q_2^m, \qquad q_1 = p_2^m q_2^{1-m}; \tag{27}$$

et il suffira d'écrire que l'expression

$$p_2^{1-m} q_2^m\, dx + p_2^m q_2^{1-m}\, dy$$

est une différentielle exacte pour obtenir l'équation aux dérivées partielles

$$\left(\frac{p_2}{q_2}\right)^{1-m} t_2 - \left(\frac{q_2}{p_2}\right)^{1-m} r_2 + \frac{1-m}{m}\left[\left(\frac{q_2}{p_2}\right)^m - \left(\frac{p_2}{q_2}\right)^m\right] s_2 = 0, \tag{28}$$

à laquelle devra satisfaire θ_2. Une transformation bien connue de Legendre ramènerait cette équation à la forme linéaire; mais nous

allons revenir plus loin, par une autre méthode, sur le cas des deux facteurs distincts. Remarquons seulement que, pour $m = 1$, on trouve l'équation

$$t_2 = r_2,$$

qui correspond aux intégrales du second degré.

616. Voici encore une autre hypothèse dans laquelle on peut obtenir la détermination effective de la valeur de λ. Supposons que le nombre k des fonctions θ_i se réduise à l'unité, mais que les exposants α et β ne soient pas nuls. On pourra, en élevant φ à une puissance convenable et en la multipliant par une puissance de $\frac{pq}{\lambda}$, ramener les valeurs de α, β, m_1 à satisfaire aux conditions

$$(29) \qquad \alpha = -\beta, \qquad m_1 = 1.$$

On aura ici

$$s = 2\alpha + 1, \qquad s' = 1 - 2\alpha,$$

et, par conséquent, si la valeur absolue de α n'est pas égale à $\frac{1}{2}$ (¹), on pourra remplacer par l'unité les deux fonctions X, Y qui figurent dans les deux équations (12). On aura ainsi

$$(30) \qquad f\lambda^{\alpha} p_1 = 1, \qquad f\lambda^{-\alpha} q_1 = 1,$$

ce qui donne

$$(31) \qquad f^2 = \frac{1}{\lambda}$$

et, par suite,

$$(32) \qquad p_1 = \lambda^{\frac{1}{2}-\alpha}, \qquad q_1 = \lambda^{\frac{1}{2}+\alpha}.$$

En exprimant que p_1 et q_1 sont les dérivées d'une même fonction, on obtient pour λ l'équation linéaire

$$(1 - 2\alpha)\lambda^{-\alpha}\frac{\partial \lambda}{\partial y} = (1 + 2\alpha)\lambda^{\alpha}\frac{\partial \lambda}{\partial x},$$

(¹) L'hypothèse $\alpha = \pm \frac{1}{2}$ ne pourrait conduire qu'à des surfaces imaginaires.

dont l'intégrale générale est donnée par la formule

$$(1+2\alpha)\lambda^{\alpha}y+(1-2\alpha)\lambda^{-\alpha}x=\varphi(\lambda). \tag{33}$$

Telle est la relation qui fera connaître λ. L'élément linéaire correspondant pourra convenir à des surfaces réelles si α est purement imaginaire et si $\varphi(\lambda)$ désigne une fonction réelle.

617. Nous allons maintenant revenir aux intégrales à deux facteurs distincts pour les traiter par une méthode plus simple.

Soit

$$\varphi=f(u,v)(pq_1-qp_1)^m(pq_2-qp_2)^{-1} \tag{34}$$

une telle intégrale, écrite avec des variables tout à fait quelconques. Si l'on rapporte la surface aux deux familles de courbes coordonnées

$$\theta_1=\text{const.},\qquad \theta_2=\text{const.},$$

l'intégrale considérée se ramènera à la forme simple

$$\varphi=h\frac{p^m}{q}, \tag{35}$$

où h désigne une fonction inconnue de u et de v. D'ailleurs les deux familles coordonnées étant formées de courbes parallèles, l'élément linéaire de la surface aura pour expression (n° 527)

$$ds^2=\frac{du^2+dv^2+2\cos\alpha\,du\,dv}{\sin^2\alpha}. \tag{36}$$

On aura ici

$$\Delta\theta=p^2+q^2-2pq\cos\alpha. \tag{37}$$

Posons

$$\cos\alpha=\lambda, \tag{38}$$

et écrivons l'équation de condition

$$(\Delta,\varphi)=0;$$

nous serons conduits aux deux relations

$$\left\{\begin{aligned}&\lambda\frac{\partial h}{\partial v}+h\frac{\partial\lambda}{\partial v}-\frac{\partial h}{\partial u}=0,\\&\lambda\frac{\partial h}{\partial u}-mh\frac{\partial\lambda}{\partial u}-\frac{\partial h}{\partial v}=0,\end{aligned}\right. \tag{39}$$

qui détermineront à la fois λ et h. Comme la première s'écrit

$$\frac{\partial}{\partial v}(\lambda h) = \frac{\partial h}{\partial u},$$

on y satisfera en prenant

$$(40) \qquad \lambda h = \frac{\partial \sigma}{\partial u}, \qquad h = \frac{\partial \sigma}{\partial v},$$

σ désignant une fonction auxiliaire.

On a donc

$$\lambda = \frac{\dfrac{\partial \sigma}{\partial u}}{\dfrac{\partial \sigma}{\partial v}}, \qquad h = \frac{\partial \sigma}{\partial v},$$

et, en portant ces valeurs de h et de λ dans la seconde équation, on trouve

$$(41) \qquad \frac{\partial \sigma}{\partial v}\left(\frac{\partial^2 \sigma}{\partial v^2} + m\frac{\partial^2 \sigma}{\partial u^2}\right) - \frac{\partial \sigma}{\partial u}(1+m)\frac{\partial^2 \sigma}{\partial u\,\partial v} = 0.$$

Effectuons la substitution de Legendre et posons

$$x = \frac{\partial \sigma}{\partial u}, \qquad y = \frac{\partial \sigma}{\partial v}, \qquad z = u\frac{\partial \sigma}{\partial u} + v\frac{\partial \sigma}{\partial v} - \sigma;$$

z, considérée comme fonction de x et de y, sera définie par l'équation

$$(42) \qquad y(r + mt) + x(1+m)s = 0,$$

qui est linéaire et beaucoup plus simple de toute manière que celle du n° 615.

On aperçoit immédiatement une infinité de solutions homogènes de cette équation

$$mx^2 - y^2, \quad 3xy^2 - (1+2m)x^3, \quad \ldots,$$

et, d'une manière tout à fait générale,

$$x^\mu\, F\left(\frac{1-\mu}{2}, \frac{-\mu}{2}, \frac{1+(1+m)(1-\mu)}{2}, \frac{y^2}{x^2}\right),$$

F désignant la série hypergéométrique de Gauss ou toute autre solution de l'équation du second ordre à laquelle satisfait cette série. Il sera donc aisé, si l'on suit les règles employées en Physique

mathématique, de former des séries ou des intégrales définies satisfaisant à l'équation et contenant des constantes ou des fonctions arbitraires.

618. On pourrait aussi essayer d'appliquer à l'équation (42) les méthodes exposées dans le Livre IV; mais, pour cela, il faudrait commencer par la ramener à la forme normale en intégrant l'équation différentielle des caractéristiques. Cette intégration est possible, mais elle paraît conduire à un résultat compliqué.

Si l'on pose

$$x' = x\sqrt{m} + y, \qquad y' = x\sqrt{m} - y, \tag{43}$$

l'équation prend une forme un peu plus simple.

Elle devient

$$[(3m+1)x' + (1-m)y']r' - [(3m+1)y' + (1-m)x']t' = 0.$$

Dans le cas où l'on a

$$m = -\frac{1}{3},$$

elle se réduit à la suivante

$$y'r' - x't' = 0. \tag{44}$$

Les équations des caractéristiques sont alors

$$y'^{\frac{3}{2}} \pm x'^{\frac{3}{2}} = \text{const.}$$

Posons

$$x'^{\frac{3}{2}} + y'^{\frac{3}{2}} = \alpha^{\frac{1}{2}},$$
$$x'^{\frac{3}{2}} - y'^{\frac{3}{2}} = \beta^{\frac{1}{2}};$$

l'équation prendra la forme nouvelle

$$\frac{\partial^2 z}{\partial\alpha\,\partial\beta} = m\frac{\partial z}{\partial\alpha} + n\frac{\partial z}{\partial\beta},$$

où m et n sont des fonctions à déterminer. On obtient leurs valeurs rapidement en employant l'artifice suivant. L'équation (44) admet évidemment les deux solutions

$$x'^3 + y'^3 = \frac{\alpha+\beta}{2}, \qquad x'y' = \left(\frac{\alpha-\beta}{4}\right)^{\frac{2}{3}}.$$

Exprimant que ces solutions appartiennent à la nouvelle équa-

tion, on trouve les deux relations

$$m + n = 0, \qquad + \frac{1}{3} = (m - n)(\alpha - \beta),$$

d'où l'on déduit

$$m = - n = \frac{1}{6} \frac{1}{\alpha - \beta},$$

et l'équation devient

$$(45) \qquad (\alpha - \beta)\frac{\partial^2 z}{\partial\alpha\,\partial\beta} - \frac{1}{6}\frac{\partial z}{\partial\alpha} + \frac{1}{6}\frac{\partial z}{\partial\beta} = 0.$$

C'est l'équation $E\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right)$, qui rentre dans celles que nous avons étudiées et intégrées [II, p. 54].

L'intégrale correspondante

$$\varphi = \frac{h}{q} p^{-\frac{1}{3}}.$$

peut, par une élévation à la puissance -3, être remplacée par une autre

$$(46) \qquad \psi = h^{-3} p q^3,$$

qui sera *entière et du quatrième degré, mais aura un facteur triple*. Ainsi nous savons déterminer complètement la forme de l'élément linéaire qui correspond à ce cas spécial de l'intégrale homogène du quatrième degré.

619. Les recherches précédentes admettent pour point de départ la classification des intégrales que nous avons donnée au n° 610, d'après Bour, MM. O. Bonnet et Maurice Lévy. Mais, au lieu de séparer les intégrales d'après leur degré ou le nombre de leurs facteurs distincts, on peut se demander s'il en existe d'une forme déterminée, s'il y en a, par exemple, qui ne contiennent pas quelques-unes des variables u, v, p, q. En nous plaçant à ce point de vue, nous avons été conduit aux deux résultats suivants, qui nous paraissent nouveaux et que nous allons présenter d'une manière synthétique.

Si l'on pose, pour abréger,

$$(47) \qquad e = \frac{G}{EG - F^2}, \qquad f = \frac{-F}{EG - F^2}, \qquad g = \frac{E}{EG - F^2},$$

l'équation qu'il s'agit d'intégrer sera

$$\Delta\theta = ep^2 + 2fpq + gq^2 = 1. \tag{48}$$

Supposons que e, f, g aient les valeurs suivantes

$$\left\{\begin{aligned} e &= au + bv + c, \\ f &= a'u + b'v + c', \\ g &= a''u + b''v + c'', \end{aligned}\right. \tag{49}$$

qui sont linéaires par rapport à u et à v; on reconnaîtra aisément qu'il existe une intégrale φ ne dépendant que de p et de q.

En effet, si l'on suppose φ indépendante de u et de v, l'équation de condition

$$(\Delta, \varphi) = 0$$

nous donne simplement

$$\frac{\partial\varphi}{\partial p}(ap^2 + 2a'pq + a''q^2) + \frac{\partial\varphi}{\partial q}(bp^2 + 2b'pq + b''q^2) = 0.$$

Les coefficients ne contenant ni u ni v, il existe bien une fonction φ qui satisfait à cette équation aux dérivées partielles. Pour la déterminer, il faudra intégrer l'équation homogène

$$dp(bp^2 + 2b'pq + b''q^2) - dq(ap^2 + 2a'pq + a''q^2) = 0.$$

Par exemple, on pourra prendre

$$\varphi = \int \frac{(bp^2 + 2b'pq + b''q^2)\,dp - (ap^2 + 2a'pq + a''q^2)\,dq}{p(bp^2 + 2b'pq + b''q^2) - q(ap^2 + 2a'pq + a''q^2)}. \tag{50}$$

Des formules (47) on déduit facilement l'élément linéaire de la surface. On a, en effet,

$$eg - f^2 = \frac{1}{EG - F^2}, \tag{51}$$

et l'on déduira de là

$$E = \frac{g}{eg - f^2}, \qquad F = \frac{-f}{eg - f^2}, \qquad G = \frac{e}{eg - f^2}. \tag{52}$$

620. Nous laisserons au lecteur le soin de faire la discussion de tous les cas particuliers qui peuvent se présenter ici et qui sont assez nombreux. Nous indiquerons seulement les suivants.

Prenons d'abord

$$e = v, \qquad f = 0, \qquad g = u. \tag{53}$$

L'élément linéaire sera donné par la formule

$$ds^2 = \frac{du^2}{v} + \frac{dv^2}{u}. \tag{54}$$

L'intégrale φ, qui se réduira ici à $\frac{1}{3}\log(p^3 - q^3)$, nous donnera l'équation

$$p^3 - q^3 = C, \tag{55}$$

qu'il faudra joindre à la suivante

$$vp^2 + uq^2 = 1, \tag{56}$$

pour déterminer p et q. Ce cas spécial a été déjà signalé par Laguerre [1].

L'élément linéaire étant homogène, on pourra déterminer effectivement des surfaces spirales qui admettent cet élément (n° 614). Il en est de même, dans le cas général, toutes les fois que les fonctions e, f, g ne sont pas linéairement indépendantes. Alors une substitution de la forme

$$u \mid u + \alpha, \qquad v \mid v + \beta$$

permettra de rendre homogène l'élément linéaire de la surface.

Nous signalerons encore le cas particulier suivant

$$e = u, \qquad f = mv, \qquad g = 1. \tag{57}$$

On aura ici l'intégrale

$$p^{2m} = Cq, \tag{58}$$

en sorte que p et q seront déterminés par cette équation jointe à la suivante

$$up^2 + 2mvpq + q^2 = 1. \tag{59}$$

Mais on peut trouver une seconde intégrale en remarquant que, si l'on fait la substitution

$$v^2 = 2v', \tag{60}$$

---

(1) LAGUERRE, *Sur un genre particulier de surfaces dont on peut déterminer les lignes géodésiques* (*Bulletin de la Société mathématique*, t. I, p. 81; 1873).

l'équation précédente devient

$$(61)\qquad up^2 + 4mv'pq' + 2v'q'^2 = 1,$$

et appartient encore à la forme que nous étudions. Il y a donc une nouvelle intégrale de la forme

$$\theta(p, q') = 0.$$

En la recherchant et en la combinant avec l'intégrale (58), on obtient le résultat suivant :

$$(62)\qquad vq + \frac{2}{4m-1}\frac{q^2}{p} = C'.$$

L'élimination de p et de q entre les trois équations (58), (59) et (62) donnera en termes finis l'équation générale des lignes géodésiques.

L'élément linéaire de la surface correspondante a pour expression

$$(63)\qquad ds^2 = \frac{du^2 - 2mv\,du\,dv + u\,dv^2}{u - m^2v^2}.$$

Si l'on introduit la variable v', il prendra la forme *homogène*

$$(64)\qquad ds^2 = \frac{v'(du^2 - 2m\,du\,dv') + \frac{u}{2}dv'^2}{v'(u - 2m^2v')}.$$

On pourra donc encore obtenir des surfaces spirales admettant cet élément linéaire.

621. Considérons maintenant les surfaces dont l'élément linéaire est réductible à la forme générale

$$(65)\qquad ds^2 = V[du^2 + (u + V_1)^2 dv^2],$$

où V, V_1 désignent des fonctions quelconques de v. L'équation à intégrer devient ici

$$(66)\qquad p^2 + \frac{q^2}{(u + V_1)^2} = V.$$

Cherchons si l'on ne pourrait pas y satisfaire en prenant pour θ une fonction linéaire par rapport à u

$$\theta = Pu + Q,$$

P et Q étant des fonctions de v. On trouvera ainsi la condition

$$P^2 + \left(\frac{P'u + Q'}{u + V_1}\right)^2 = V,$$

qui nous conduit aux deux équations

$$(67) \qquad Q' = P'V_1, \qquad P^2 + P'^2 = V.$$

Il faudra donc d'abord intégrer l'équation différentielle

$$(68) \qquad P^2 + \left(\frac{dP}{dv}\right)^2 = V,$$

puis Q se déterminera par une quadrature

$$(69) \qquad Q = \int V_1\, dP.$$

L'intégration de l'équation différentielle introduira la constante arbitraire dont la présence est nécessaire pour assurer la généralité nécessaire à la solution θ.

Ici, on le voit, le succès est moins grand que dans les exemples précédents. On n'a pas la solution complète du problème; mais on a fait un pas vers cette solution et l'on peut dire que l'on a ramené l'intégration de l'équation différentielle du second ordre des lignes géodésiques à celle de l'équation (68), qui est seulement du premier ordre.

Dans le Mémoire que nous avons cité plusieurs fois, M. Lie avait déjà signalé une proposition du même genre relative à la détermination des lignes géodésiques des surfaces spirales. Ce premier résultat se trouve compris comme cas particulier dans celui que nous venons d'établir. On reconnaît, en effet, très simplement que l'élément linéaire (65) se réduit à celui des surfaces spirales les plus générales quand on y fait

$$V_1 = 0.$$

On a alors

$$(70) \qquad ds^2 = V(du^2 + u^2\, dv^2),$$

et, si l'on effectue la transformation définie par les formules

$$(71) \qquad u = e^{v'}, \qquad \sqrt{V}\, dv = du',$$

on est conduit à la forme

$$ds^2 = e^{2v'}[du'^2 + \varphi(u')\,dv'^2], \tag{72}$$

qui convient, nous l'avons déjà remarqué (n° 90), à une infinité de surfaces spirales.

Dans ce qui précède, nous avons déjà appris à déterminer complètement les lignes géodésiques d'un nombre illimité de surfaces spirales. De là résulte, on le reconnaîtra sans peine, qu'on pourra intégrer l'équation différentielle (68) dans un nombre illimité de cas et, par suite, déterminer, pour une infinité de formes de la fonction V, *et quelle que soit la fonction* V_1, les lignes géodésiques des surfaces correspondantes [1].

L'élément linéaire défini par la formule (65) peut être transformé de la manière suivante. Nous avons déjà montré [n° 70] que, si l'on pose

$$ds'^2 = du^2 + (u + V_1)^2\,dv^2, \tag{73}$$

ds' sera l'élément linéaire d'un plan rapporté à des lignes droites ($v =$ const.) et à leurs trajectoires orthogonales ($u =$ const.). Soient x et y les coordonnées rectangulaires d'un point de ce plan, qui seront des fonctions de u et de v. On aura

$$ds'^2 = dx^2 + dy^2,$$

et, par suite, on pourra ramener ds^2 à la forme suivante

$$ds^2 = V(dx^2 + dy^2). \tag{74}$$

---

[1] Une surface spirale peut être soumise, nous l'avons vu, à une déformation homothétique continue, dans laquelle la surface ne cesse pas de coïncider avec elle-même. Dans cette déformation progressive, une ligne géodésique vient occuper une série continue de positions dont l'ensemble constituera une famille. Les trajectoires orthogonales de cette famille de géodésiques se détermineront toujours (n^{os} 523 et 533) par une simple quadrature qui fera connaître une solution de l'équation

$$\Delta\theta = 1;$$

cette solution particulière est précisément celle que nous obtiendrons ici par l'intégration de l'équation (68). Toutes les fois que l'on saura déterminer par une méthode quelconque les géodésiques de la surface spirale, on pourra donc aussi obtenir par une quadrature l'intégrale générale de l'équation correspondante (68).

V est une quantité qui doit demeurer constante avec v, c'est-à-dire sur les droites d'une famille donnée; elle sera nécessairement déterminée par une équation de la forme

$$y = x\varphi(V) + \psi(V). \tag{75}$$

Telle est l'expression nouvelle que l'on peut donner à l'élément linéaire (65).

Si l'on applique maintenant le principe de la moindre action [II, p. 450], on reconnaîtra que la détermination des lignes géodésiques équivaut à la solution d'un problème de Mécanique dans lequel la fonction des forces serait V et l'équation des forces vives

$$v^2 = 2V.$$

De là résulte le théorème suivant :

La solution de tout problème de Mécanique dans le plan pour lequel il existe une fonction des forces, les lignes équipotentielles étant des droites d'ailleurs quelconques, se ramène à l'intégration d'une équation différentielle du premier ordre et du second degré de la forme (68).

CHAPITRE V.

LE PLUS COURT CHEMIN ENTRE DEUX POINTS D'UNE SURFACE.

Comparaison d'un segment de géodésique à tous les chemins infiniment voisins réunissant ses extrémités. — Considérations géométriques; enveloppe de toutes les géodésiques passant par un point. — Énoncé d'une propriété générale qui s'applique à un grand nombre de problèmes de maximum. — Méthode analytique de M. O. Bonnet. — Détermination des géodésiques infiniment voisines d'une géodésique donnée. — Deux théorèmes de Sturm sur les équations différentielles linéaires. — Application aux lignes géodésiques. — Formule qui donne la variation de longueur d'un arc de courbe quelconque. — Conditions auxquelles doit satisfaire le plus court chemin entre deux points d'une surface limitée d'une manière quelconque. — Extension que l'on peut donner au problème du plus court chemin. — Introduction de la notion de la *longueur réduite* d'un segment de géodésique due à M. Christoffel.

---

622. Nous avons vu que, si l'on prend deux points suffisamment rapprochés A et B sur une géodésique, cette ligne sera le plus court chemin entre les deux points. Mais la démonstration que nous avons donnée cesse, en général, d'être applicable quand les deux points s'éloignent l'un de l'autre.

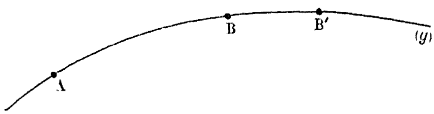
Supposons, par exemple, qu'il s'agisse de la sphère. Dans ce cas, la géodésique sera un grand cercle; si l'arc AB, d'abord plus petit qu'une demi-circonférence, augmente et finit par dépasser cette limite, il cessera d'être la ligne la plus courte entre A et B.

Nous allons considérer une surface quelconque, et nous nous proposerons le problème suivant : *Étant donnés deux points* A *et* B *sur la surface, déterminer le plus court chemin entre ces deux points*. Il est impossible de résoudre ce problème d'une manière générale; mais nous allons faire connaître différentes propositions qui permettront de l'aborder dans chaque cas particulier.

Construisons toutes les géodésiques passant en un point A de la surface et soit (g) l'une d'elles (*fig.* 39). Supposons que la géodésique infiniment voisine (g') aille rencontrer (g) en un ou plusieurs points et désignons par B' celui de ces points qui est le

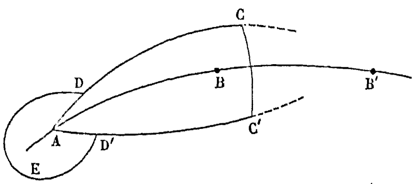
plus rapproché de A. Je vais montrer que, si l'on prend un point B sur la ligne (g), l'arc AB sera plus petit que tout autre chemin *infiniment voisin* réunissant les mêmes points, tant que le point B sera situé entre A et B'.

Fig. 39.



En effet, supposons que le point B soit entre A et B'. Menons par le point A deux géodésiques AC, AC' qui iront rencontrer AB pour la première fois en des points voisins de B' et considérons la région de la surface limitée par la courbe CDED'C'C formée du trait C'C réunissant les deux géodésiques et voisin de B, des deux portions CD, C'D' de géodésiques et de la courbe DED' entourant le point A. Il est clair que la région ainsi définie jouit de la propriété

Fig. 40.



que, par un quelconque de ses points et par le point A, il passe une seule géodésique située tout entière dans la région. Alors les points de la région pourront être rapportés au système de coordonnées curvilignes formé des géodésiques passant en A et de leurs trajectoires orthogonales; la démonstration du n° 521 s'appliquera sans modification, l'arc AB sera plus court que tout autre chemin tracé sur la région et, par conséquent, que tous les chemins infiniment voisins.

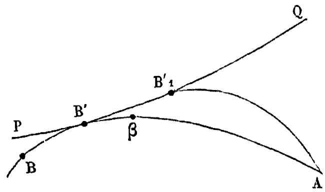
Nous allons voir que cette propriété ne subsiste plus quand le point B est au delà de B'. Pour cela nous emploierons la notion suivante, qui est due à Jacobi [1].

---

(1) *Voir*, par exemple, JACOBI, *Vorlesungen über Dynamik*. Sixième Leçon.

Puisque nous supposons que la ligne géodésique (g) est rencontrée par les géodésiques infiniment voisines partant de A, nous pouvons admettre que cette propriété appartient à une infinité de géodésiques passant en A, que ces géodésiques ont une enveloppe. Soit PQ cette enveloppe (*fig.* 41) et soient AB', AB'_1 deux lignes

Fig. 41.



géodésiques la touchant en deux points B', B'_1. La ligne PQ pouvant être regardée comme la développée du point A, on aura, quelle que soit la grandeur de l'arc $B'B'_1$,

$$\text{arc}\, AB' = \text{arc}\, AB'_1 + \text{arc}\, B'_1B'.$$

Cela résulte immédiatement de la formule relative à la différentielle d'un segment de géodésique, donnée au n° 323 [II, p. 417].

D'autre part, l'enveloppe PQ ne sera jamais une ligne géodésique. En effet, en chacun de ses points, elle est tangente à une des lignes géodésiques partant de A, et l'on sait qu'il y a une seule ligne géodésique passant par un point et y admettant une tangente déterminée. Donc la ligne PQ ne saurait être géodésique.

D'après cela, si l'on considère le chemin formé par AB'_1 et par l'arc B'_1B', chemin qui est égal à l'arc AB', il sera possible de substituer à la seconde partie B'_1B' de ce chemin une route plus courte. Remarquons d'ailleurs que, si B'_1 est infiniment voisin de B', le nouveau chemin sera infiniment voisin de AB'; donc l'arc AB' peut être remplacé par un chemin infiniment voisin et plus court.

Il en sera de même, *a fortiori*, si le point B est au delà de B'; car il suffira, pour obtenir un chemin plus court que l'arc AB, de prendre l'un des chemins plus courts que AB' qui aboutissent en B' et ensuite de parcourir l'arc B'B.

623. La démonstration précédente repose sur des considérations

de continuité et sur l'hypothèse de l'existence d'une enveloppe. Nous allons en donner une autre plus analytique. Mais auparavant nous appellerons l'attention sur un fait qu'elle met en évidence, et qui est un cas particulier d'une loi qui paraît s'appliquer à tous les problèmes de maximum ou de minimum.

Reprenons l'arc AB' égal au chemin $AB'_1 B'$ et supposons qu'en substituant à l'arc $B'B'_1$ de l'enveloppe la route la plus directe entre ces deux points, on raccourcisse la route d'une longueur h. On pourra donc aller de A en B' par un chemin égal à $AB' - h$, h étant une quantité finie. Prenons en avant de B' un point β. On pourra y parvenir, soit par l'arc $A\beta$

$$A\beta = AB' - B'\beta,$$

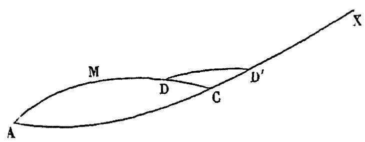
soit par le chemin $AB' - h$ qui passe en B' auquel on fera succéder le chemin $B'\beta$

$$AB' - h + B'\beta.$$

Or ce second chemin sera plus court que le premier $A\beta$ tant que $B'\beta$ sera inférieur à la quantité finie $\frac{h}{2}$. Donc *la ligne géodésique cessera d'être le minimum absolu avant de cesser d'être minimum relativement aux chemins qui s'en écartent infiniment peu.*

En résumé, il y aura autour du point A deux courbes distinctes : l'une sera le lieu du premier point où chaque ligne géodésique est rencontrée par une autre géodésique de longueur égale; l'autre sera l'enveloppe des lignes géodésiques. Si le point B se déplace sur une des géodésiques AX (*fig.* 42), le chemin AB demeurera

Fig. 42.



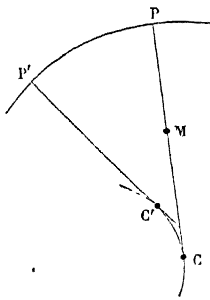
le minimum absolu tant que le point B n'aura pas atteint le point C de la première courbe pour lequel la géodésique devient égale à une autre géodésique terminée aux mêmes points. Cela est évident, car le chemin AB, qui est le plus court lorsque le point B est très voisin de A, ne peut perdre cette propriété qu'au moment

où il devient égal à un autre chemin. La ligne AB cessera d'être minimum absolu dès que le point B dépassera le point C ([1]), mais demeurera minimum par rapport aux chemins infiniment voisins, tant que B n'aura pas atteint le point où l'enveloppe des géodésiques est touchée pour la première fois par AX.

Dans certaines surfaces exceptionnelles, les deux courbes précédentes pourront se confondre et la loi que nous signalons disparaîtra. C'est ce qui a lieu, par exemple, dans le cas de la sphère ou pour l'ensemble des méridiens d'une surface de révolution.

La loi générale que nous venons de signaler se retrouve dans l'étude de tous les problèmes de maximum ou de minimum. Considérons, par exemple, une courbe plane PP′ (*fig.* 43), et supposons

Fig. 43.



qu'il s'agisse de trouver le plus court chemin d'un point M pris dans le plan de cette courbe à la courbe elle-même. Ce chemin ne peut être, comme on sait, qu'une des normales menées de M à la courbe.

Considérons l'une d'elles, normale en P, et soit C le centre de courbure relatif au point P. Le Calcul infinitésimal nous apprend que, tant que M sera du même côté que le point P par rapport à C, la normale MP sera plus courte que tous les chemins infiniment voisins. Mais supposons que M vienne en C et soit C′P′ une autre

---

([1]) En effet, soit D′ une position de B un peu au delà de C. Le chemin AD′ est égal au chemin AMDCD′, et il est évident que l'on raccourcira ce dernier chemin si, arrivé en un point D très voisin de C, on se dirige directement vers le point D′ par l'arc DD′. Il est donc impossible que AD′ soit le plus court chemin entre A et D′.

normale à la courbe. D'après les propriétés de la développée, nous aurons

$$CP = C'P' + \text{arc}\, CC'$$

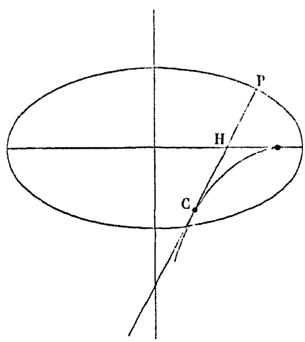
et, par suite,

$$CP > C'P' + \text{corde}\, CC'.$$

On démontrera par suite, comme on l'a fait plus haut, que la normale MP cessera d'être le plus court chemin d'une manière absolue avant que le point M soit venu se confondre avec le point C.

Comment cela peut-il s'expliquer? Quand le point M s'est déplacé de P vers C, il y a eu un instant où une autre normale menée à la courbe a eu la même longueur que MP. Ensuite, cette seconde normale devient la plus courte; mais MP, qui a perdu la propriété d'être le minimum absolu, demeure encore plus courte que tous les chemins infiniment voisins jusqu'au moment où le point M vient coïncider avec le centre de courbure. Une discussion complète du problème doit donc faire intervenir, en même temps que l'enveloppe des normales, le lieu des points d'où l'on peut mener à la courbe deux normales égales. C'est ce que montre clairement l'exemple de l'ellipse (*fig.* 44). Ici le lieu des points

Fig. 44.



d'où l'on peut mener deux normales égales se compose des deux axes, et toute normale PH rencontre le grand axe en H avant de devenir tangente à la développée en C. Quand le point M sera du même côté que P par rapport à H, il y aura minimum absolu; de H à C, le minimum n'aura plus lieu que relativement aux chemins

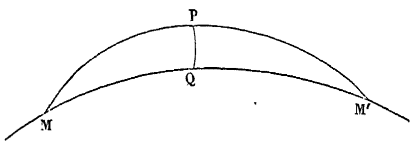
infiniment voisins. Au delà de C, la normale ne sera plus d'aucune manière un chemin minimum.

On serait conduit à une discussion analogue si l'on demandait le chemin rectiligne le plus long que l'on puisse mener d'un point à l'ellipse.

624. On peut étudier la question que nous venons de résoudre en suivant une méthode toute différente qui conduit à des propositions élégantes et qui a été employée en premier lieu par M. Ossian Bonnet [1].

Soit MQM′ une ligne géodésique (*fig.* 45). Pour déterminer les

Fig. 45.



points P de la surface qui sont dans le voisinage de cette ligne, nous emploierons le système de coordonnées formé par les lignes géodésiques normales à MM′ et par leurs trajectoires orthogonales. Alors, si u désigne la longueur de la normale géodésique abaissée de P sur MM′ et si v désigne la longueur de l'arc MQ, l'élément linéaire de la surface sera donné par la formule

$$ds^2 = du^2 + C^2\, dv^2;$$

C est une fonction de u et de v qui doit se réduire à 1 pour $u = 0$. De plus, si l'on exprime que la ligne MM′ est géodésique, on aura

$$\frac{\partial C}{\partial u} = 0 \qquad \text{pour} \qquad u = 0.$$

Remarquons d'ailleurs qu'en vertu de la formule de Gauss on a, pour toutes les valeurs de u et de v,

$$\frac{\partial^2 C}{\partial u^2} = -\frac{C}{RR'}.$$

---

(1) O. Bonnet, *Sur quelques propriétés des lignes géodésiques* (*Comptes rendus*, t. XL, p. 1311; 1850). — *Note sur les lignes géodésiques* (Même Recueil, t. XLI, p. 32; 1851).

Cette formule nous permet de développer C suivant les puissances de u; et, en tenant compte des résultats que nous venons d'indiquer, on obtient le développement suivant

$$\text{(1)} \qquad C = 1 - \frac{u^2}{2RR'} - \frac{u^3}{6}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{RR'}\right),$$

où nous négligeons seulement les termes du quatrième ordre par rapport à u. Les valeurs des coefficients $\frac{1}{RR'}$ et $\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{RR'}\right)$ sont prises pour $u = 0$.

Cela posé, menons par les points M, M′ une ligne MPM′ s'écartant infiniment peu de la ligne géodésique et pour tous les points de laquelle u sera une fonction infiniment petite de v. L'arc de cette ligne aura pour expression

$$s = \int_M^{M'} \sqrt{u'^2 + C^2}\, dv = \int_M^{M'} \sqrt{1 + u'^2 - \frac{u^2}{RR'} - \frac{u^3}{3RR'}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{RR'}\right)}\, dv,$$

u' désignant la dérivée de u et les termes négligés contenant tous u^4 en facteur. Si nous supposons que la dérivée u' ne devienne jamais infinie et soit, par conséquent, de l'ordre de u (¹), nou-

(¹) Nous introduisons ici, on le remarquera, une hypothèse restrictive que nous pouvions laisser de côté dans notre première méthode : par sa définition même, la fonction u est infiniment petite pour tous les chemins infiniment voisins de la ligne géodésique; mais, pour assurer la convergence de notre développement en série, nous sommes obligés maintenant d'ajouter la condition que la dérivée u' soit infiniment petite comme u et ne devienne jamais infinie. Or c'est ce qui n'aura pas lieu si l'on prend des valeurs de u telles que les suivantes :

$$u = \alpha v^{\frac{1}{3}}, \qquad u = \alpha v^{\frac{1}{2}} \varphi(v),$$

où α est une constante infiniment petite et $\varphi(v)$ une fonction finie pour $v = 0$. Des difficultés du même genre se présentent dans l'étude générale des problèmes du Calcul des variations. Si, par exemple, on cherche le maximum ou le minimum de l'intégrale

$$\int f(x, y, y', y'')\, dx,$$

remplacer y par $y + \delta y$ et développer en série revient à admettre que la fonction δy de x est telle que ce développement en série soit toujours possible, c'est-à-dire que les dérivées $\delta y'$, $\delta y''$ de δy ne deviennent jamais infinies. On voit ainsi que les méthodes directes au moyen desquelles nous avons établi les propriétés de minimum relatives aux lignes géodésiques sont préférables à celles que l'on peut déduire du Calcul des variations et qu'elles nous permettent d'établir un résultat à la fois plus précis et plus étendu.

aurons, en négligeant les termes du quatrième ordre,

$$(2) \qquad s - \mathrm{MM}' = \frac{1}{2}\int_{\mathrm{M}}^{\mathrm{M}'} \left[u'^2 - \frac{u^2}{\mathrm{RR}'} - \frac{u^3}{3\,\mathrm{RR}'}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\mathrm{RR}'}\right)\right] dv.$$

Bornons-nous, dans la formule précédente, aux termes du second ordre qui, lorsqu'ils ne sont pas nuls, donnent leur signe à la variation de l'arc ; on aura

$$(3) \qquad \delta\,\mathrm{MM}' = \frac{1}{2}\int_{\mathrm{M}}^{\mathrm{M}'} \left(u'^2 - \frac{u^2}{\mathrm{RR}'}\right) dv.$$

Si la surface est à courbures opposées, cette variation sera toujours positive. Donc, *dans ce cas, la ligne géodésique ne cessera jamais d'être la plus courte si on la compare seulement aux chemins infiniment voisins.*

Supposons, au contraire, la courbure positive. L'intégrale précédente se composera de deux parties de signes contraires. Pour déterminer son signe, nous introduirons les solutions de l'équation

$$(4) \qquad \frac{d^2p}{dv^2} = -\frac{p}{\mathrm{RR}'},$$

et nous allons, en premier lieu, indiquer la signification géométrique de ces solutions.

625. Pour cela, considérons, d'une manière générale, un système de coordonnées dont l'une des familles soit formée de lignes géodésiques. L'élément linéaire de la surface sera donné par la formule

$$ds^2 = du^2 + \mathrm{C}^2\,dv^2,$$

et $\mathrm{C}\,dv$ représentera l'arc de la trajectoire orthogonale compris entre les deux lignes géodésiques (v) et $(v + dv)$. En d'autres termes, ce sera la longueur de la normale infiniment petite qu'il faudra élever en chaque point de la géodésique (v) pour obtenir la géodésique $(v + dv)$. Supposons v et dv constants ; les diverses valeurs que prend la quantité $\mathrm{C}\,dv$ en tous les points de la géodésique (v) seront des fonctions de u, c'est-à-dire de l'arc de cette géodésique compté à partir d'une origine fixe. Or on a, en vertu de la formule de Gauss,

$$\frac{1}{\mathrm{RR}'} = -\frac{1}{\mathrm{C}}\frac{\partial^2 \mathrm{C}}{\partial u^2}.$$

Si donc on pose $C\,dv = p$, on voit que p satisfera à l'équation différentielle

$$\frac{d^2 p}{du^2} = -\frac{p}{RR'}, \tag{5}$$

ce qui conduit au théorème suivant :

Étant donnée une ligne géodésique quelconque, si l'on désigne par u l'arc de cette géodésique compté à partir d'une origine quelconque et par $\frac{1}{RR'}$ *la courbure de la surface, qui, pour les différents points de la ligne géodésique, sera une fonction de u, la longueur p de la normale qu'il faudra élever en chaque point de la géodésique, pour obtenir la géodésique infiniment voisine, sera une fonction de u qui devra satisfaire à l'équation linéaire* (5).

Cette équation (5) coïncide, aux notations près, avec l'équation (4), et nous avons ainsi l'interprétation géométrique de la fonction p.

Au reste, on peut chercher directement le minimum de l'intégrale

$$\frac{1}{2}\int\left(u'^2 - \frac{u^2}{RR'}\right)dv,$$

qui donne l'expression approchée de l'arc de toute courbe infiniment voisine de la géodésique MM'. Si l'on recherche celle de ces courbes qui passe par deux points donnés (u_0, v_0), (u_1, v_1) et pour laquelle l'intégrale précédente est un minimum, l'application pure et simple des règles du Calcul des variations montre immédiatement qu'elle doit être définie par l'équation différentielle (4). On retrouve ainsi, de la manière la plus simple, le résultat précédent.

626. Supposons qu'il soit possible de trouver une solution p de l'équation (4) ne s'annulant ni pour M, ni pour M', ni pour aucun point compris entre M et M'. Si nous posons

$$u = \lambda p,$$

λ devra s'annuler comme u pour les points M et M' *et il ne de-*

viendra jamais infini entre M *et* M′. En substituant la valeur précédente de u dans la formule (3), on aura

$$\delta \mathrm{MM}' = \frac{1}{2}\int_{\mathrm{M}}^{\mathrm{M}'}\left(\lambda^2 p'^2 + 2\lambda\lambda' pp' + p^2\lambda'^2 - \frac{p^2\lambda^2}{\mathrm{RR}'}\right) dv$$

ou, en remplaçant $\frac{1}{\mathrm{RR}'}$ par $-\frac{p''}{p}$,

$$\delta \mathrm{MM}' = \frac{1}{2}\int_{\mathrm{M}}^{\mathrm{M}'}(\lambda^2 p'^2 + 2\lambda\lambda' pp' + p^2\lambda'^2 + \lambda^2 pp'')\, dv$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\mathrm{M}}^{\mathrm{M}'} d(\lambda^2 pp') + \frac{1}{2}\int p^2\lambda'^2\, dv.$$

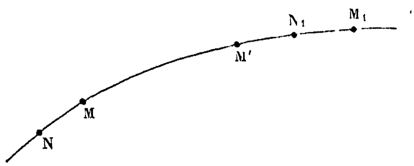
λ étant nul aux deux limites et fini dans l'intervalle de M à M′, la première intégrale est nulle; il reste donc

$$(6) \qquad \delta \mathrm{MM}' = \frac{1}{2}\int_{\mathrm{M}}^{\mathrm{M}'} p^2\left(\frac{u}{p}\right)'^2 dv.$$

On voit que la variation de MM′ est essentiellement positive; par suite, *la ligne géodésique est plus courte que tous les chemins infiniment voisins.*

Ce point étant établi, considérons la solution p de l'équation (5) qui s'annule pour le point M (*fig.* 46) et supposons que cette

Fig. 46.



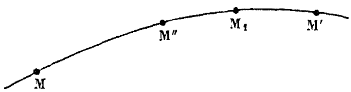
solution s'annule de nouveau au point M_1 en conservant son signe dans toute l'étendue de MM_1. Cela veut dire que les géodésiques partant de M et infiniment voisines de MM_1 viendront couper de nouveau cette ligne géodésique au point M_1 ou en un point infiniment voisin, sans la rencontrer entre M et M_1. Nous allons montrer que, si l'on prend un point M′ entre M et M_1, le segment géodésique MM′ sera plus court que tous les chemins infiniment voisins réunissant ses extrémités. En effet, la solution p de l'équation (5) us'ıq annule en un point N infiniment voisin et à gauche de M ne

s'annulera une seconde fois qu'en un point N_1 infiniment voisin de M_1 et, par conséquent, au delà de M'. Il y aura donc une solution p ne s'annulant en aucun point du segment MM', et cela suffit, nous venons de le montrer, à établir la proposition que nous avions en vue.

627. Jacobi avait énoncé sans démonstration [1] une proposition qui complète la précédente : *Le minimum cesse certainement d'avoir lieu si le point* M' *est placé au delà du point* M_1. Ce résultat a été démontré par M. O. Bonnet dans les Notes citées plus haut. On peut encore l'établir comme il suit.

Prenons au delà de M_1 (*fig.* 47) un point M' assez voisin de M_1 pour que la solution de l'équation (4) qui s'annule au point M' ne s'annule pas dans l'intervalle M_1M', y compris le point M_1. J'appelle q cette solution; il sera alors possible de déterminer entre M et M_1 un point M'' tel que la solution q ne s'annule pas dans l'intervalle $M'M''$. Je désigne, comme précédemment, par p la solution de l'équation qui s'annule aux points M et M_1 et j'achève de déterminer cette solution, qui n'est connue qu'à un facteur constant près, par la condition qu'au point M'' on ait

Fig. 47.



$$p = q.$$

Cela posé, dans la variation

$$\frac{1}{2}\int_{M}^{M'}\left(u'^2 - \frac{u^2}{RR'}\right)dv,$$

je remplace u par p de M à M'' et par q de M'' à M', ce qui est évidemment permis, ces valeurs successives de u définissant un

[1] JACOBI, *Sur le Calcul des variations et sur la Théorie des équations différentielles* (*Journal de Liouville*, t. III, p. 44; 1836). *Voir* aussi la Note VI dans le deuxième Volume de l'édition de la *Mécanique analytique* due à M. Bertrand et la quatrième Leçon des *Vorlesungen über Dynamik*.

chemin parfaitement continu. La variation prendra la valeur

$$\frac{1}{2}\int_{M}^{M''}\left(p'^2 - \frac{p^2}{RR'}\right)dv + \frac{1}{2}\int_{M''}^{M'}\left(q'^2 - \frac{q^2}{RR'}\right)dv$$

ou encore

$$\frac{1}{2}\int_{M}^{M''}(p'^2 + pp'')\,dv + \frac{1}{2}\int_{M''}^{M'}(q'^2 + qq'')\,dv.$$

Si l'on intègre et si l'on remarque que p est nul en M et q en M', on obtient pour la variation du chemin l'expression suivante

$$[pp' - qq']_{M''}.$$

Comme on a, pour le point M'', $p = q$, on peut écrire cette variation sous la forme

$$[qp' - pq']_{M''}.$$

Or, étant données deux solutions quelconques p et q de l'équation (4), on sait que le déterminant

$$qp' - pq'$$

est constant; on pourra donc calculer sa valeur pour tel point que l'on voudra, par exemple pour le point M_1, où l'on a $p = 0$. Il reste alors

$$[qp']_{M_1}.$$

Cette quantité est négative. Supposons, en effet, pour fixer les idées, que la valeur de q soit positive entre M' et M''; d'après les hypothèses faites, il en sera de même de la valeur de p entre M et M_1. Or, un peu avant le point M_1, p et p' doivent être de signe contraire; il faut donc que la valeur de p' au point M_1 soit négative.

La variation du chemin étant négative, la ligne géodésique a perdu, on le voit, sa propriété de minimum.

Il est aisé d'interpréter géométriquement la méthode que nous venons de suivre et de reconnaître comment on y est conduit. S'il existe un chemin MHM' plus court que l'arc de géodésique MM', en substituant à ce chemin les deux portions de géodésiques MH et HM' on ne pourra que diminuer sa longueur, et l'on formera un nouveau chemin qui devra être encore plus court que l'arc MM'.

628. Il nous reste à établir une remarquable proposition; mais,

avant de la faire connaître, nous allons démontrer, par une méthode nouvelle, de beaux théorèmes sur les équations linéaires du second ordre, qui sont dus à Sturm [1].

Considérons l'équation

$$\frac{d^2 V}{dx^2} = HV, \tag{7}$$

et soit $V = \varphi(x)$ une solution de cette équation s'annulant pour une valeur x_0 de x. Nous désignerons par x_1 la racine de V immédiatement supérieure à x_0; x_1 sera remplacé par $+\infty$ quand V ne s'annulera pour aucune valeur de x supérieure à x_0. Nous allons d'abord montrer qu'*aucune intégrale de l'équation linéaire ne s'annulera plus d'une fois entre x_0 et x_1*.

En effet, soit α une valeur de x comprise entre x_0 et x_1. La solution de l'équation qui s'annule pour cette valeur de x est donnée, comme on sait, par la formule

$$C\varphi(x)\int_\alpha^x \frac{dx}{\varphi^2(x)},$$

où C désigne une constante arbitraire. Aucun des facteurs de ce produit ne s'annule pour les valeurs de x comprises entre x_0 et x_1; pour toutes ces valeurs de x, l'intégrale a toujours un sens déterminé, car son élément ne devient pas infini entre les limites de l'intégration. La proposition que nous venons d'énoncer est donc établie.

Si l'on donne à C la valeur $\varphi(\alpha)$, on a la solution

$$\varphi(x)\varphi(\alpha)\int_\alpha^x \frac{dx}{\varphi^2(x)}, \tag{8}$$

que nous désignerons par $\theta(x, \alpha)$. Elle a sa dérivée égale à l'unité pour $x = \alpha$; elle est évidemment positive pour toutes les valeurs de x comprises entre α et x_1, négative pour les valeurs de x comprises entre x_0 et α. Pour x_0 ou x_1, elle revêt une forme indéterminée; mais on obtient facilement sa vraie valeur, qui n'est ni nulle

---

[1] STURM, *Mémoire sur les équations différentielles du second ordre* (*Journal de Liouville*, t. I, p. 106; 1836).

ni infinie, en faisant usage de la relation

$$\varphi(x)\frac{\partial\theta}{\partial x} - \theta\,\varphi'(x) = \varphi(\alpha), \tag{9}$$

qui a lieu pour toutes les valeurs de x.

629. Cela posé, considérons deux équations distinctes

$$\frac{d^2V}{dx^2} = HV, \tag{10}$$

$$\frac{d^2V}{dx^2} = H'V, \tag{11}$$

et supposons que l'on ait, pour toutes les valeurs de x,

$$H' \gtreqless H. \tag{12}$$

Nous allons montrer que, *si* $\varphi(x)$ *est une solution de la première admettant les deux racines consécutives* x_0, x_1, *la solution de la seconde qui s'annule pour* x_0 *ne s'annulera plus dans l'intervalle* (x_0, x_1), x_1 *compris.*

En effet, j'écris l'équation (11) de la manière suivante :

$$\frac{d^2V}{dx^2} = HV + (H' - H)V.$$

Si nous considérons $(H' - H)V$ comme une fonction donnée $\psi(x)$ de x, l'équation précédente deviendra

$$\frac{d^2V}{dx^2} - HV = \psi(x); \tag{13}$$

et, comme nous connaissons une solution $\varphi(x)$ de l'équation sans second membre, nous pourrons obtenir une formule donnant l'intégrale de l'équation complète.

Parmi les méthodes connues, appliquons celle de Cauchy : elle prescrit de former en premier lieu une solution de l'équation sans second membre qui se réduise à o pour $x = \alpha$ et dont la dérivée devienne égale à 1 pour la même valeur de x. Cette solution est celle que nous avons formée plus haut

$$\theta(x, \alpha) = \varphi(x)\,\varphi(\alpha)\int_\alpha^x \frac{dx}{\varphi^2(x)}.$$

Cela posé, une solution particulière de l'équation avec second

membre est fournie, d'après le théorème de Cauchy, par l'intégrale

$$\int_{x_0}^{x} \theta(x, \alpha)\, \psi(\alpha)\, d\alpha;$$

par suite, toutes les solutions de l'équation (13) qui s'annulent pour $x = x_0$ seront de la forme

$$C\,\varphi(x) + \int_{x_0}^{x} \theta(x, \alpha)\, \psi(\alpha)\, d\alpha,$$

où C désigne une constante arbitraire. Si donc V' désigne une solution de l'équation (11) s'annulant pour $x = x_0$, nous aurons, en substituant $(H' - H)V'$ à $\psi(x)$,

$$V' = C\,\varphi(x) + \int_{x_0}^{x} \theta(x, \alpha)[(H' - H)V']_\alpha\, d\alpha,$$

l'indice α indiquant que l'on remplace x par α dans la parenthèse.

On peut exprimer la constante C en fonction de la dérivée de V' pour la valeur x_0 de x. Si l'on prend, en effet, les dérivées des deux membres de l'équation précédente en faisant $x = x_0$, on a

$$\left(\frac{dV'}{dx}\right)_{x_0} = C\,\varphi'(x_0).$$

On obtient donc définitivement la formule suivante

$$(14) \qquad V' = \frac{\varphi(x)}{\varphi'(x_0)} \left(\frac{dV'}{dx}\right)_{x_0} + \int_{x_0}^{x} \theta(x, \alpha)[(H' - H)V']_\alpha\, d\alpha,$$

qui ne peut être d'aucun secours immédiat pour la détermination de V', mais qui va nous permettre d'établir la proposition que nous avons en vue.

Imaginons, en effet, que x varie de x_0 à x_1. La fonction V', qui est nulle pour $x = x_0$, commence par avoir un certain signe, celui de sa dérivée pour $x = x_0$, $\left(\frac{dV'}{dx}\right)_0$. Supposons, par exemple, que ce signe soit positif; la fonction le conservera évidemment de x_0 à x_1, si elle ne s'annule pas; et, pour prouver qu'elle ne s'annule pas, il suffira de faire voir que, si la fonction demeure positive pour toutes les valeurs inférieures à un nombre donné x', elle demeure positive même pour $x = x'$. Or c'est ce qui résulte

immédiatement de la formule précédente. Le premier terme du second membre sera évidemment positif pour $x = x'$, et il en sera de même de tous les éléments de l'intégrale

$$\int_{x_0}^{x'} \theta(x', \alpha)[(\mathrm{H}' - \mathrm{H})\mathrm{V}']_\alpha \, d\alpha;$$

$\theta(x', \alpha)$ est en effet positive, puisque α est inférieur à x'; il en est de même par hypothèse de $(\mathrm{H}' - \mathrm{H})$, et aussi de V'_α, qui correspond à des valeurs α de x toutes comprises entre x_0 et x'.

La proposition est donc établie. On en déduit comme corollaire la suivante :

Étant données les deux équations (10), (11), *s'il arrive que l'on ait constamment* $\mathrm{H}' \leqq \mathrm{H}$ *et qu'une solution de la première s'annule pour* $x = x_0$ *et* $x = x_1$, *la solution de la seconde qui s'annule pour* $x = x_0$ *aura au moins une seconde racine dans l'intervalle* (x_0, x_1).

Car, si cette solution ne s'annulait pas dans l'intervalle considéré, il en serait de même *a fortiori* de la solution de la première équation, en vertu même de la proposition que nous venons de démontrer [1].

630. Appliquons ces résultats au problème des lignes géodésiques et reprenons l'équation

$$\frac{d^2 p}{dv^2} = -\frac{p}{\mathrm{RR}'}. \tag{15}$$

Soient p une solution de cette équation et v_0, v_1 deux racines consécutives de p correspondantes à deux points M_0, M_1. Nous savons que l'arc $\mathrm{M}_0\mathrm{M}$ sera le plus court tant que M sera entre M_0 et M_1 mais qu'il perdra cette propriété dès que M sera au delà de M_1.

Supposons qu'en tous les points de $\mathrm{M}_0\mathrm{M}_1$ on ait

$$-\frac{1}{\mathrm{RR}'} \leqq -\frac{1}{a^2}, \qquad \text{ou} \qquad \mathrm{RR}' \leqq a^2;$$

---

[1] Les propositions établies ici ont moins d'étendue et de généralité que celles de Sturm; mais elles suffisent pour l'objet que nous avons en vue et, d'ailleurs, le lecteur pourra appliquer notre méthode à la démonstration des résultats les plus généraux contenus dans l'admirable Mémoire de Sturm.

la solution de l'équation

$$\frac{d^2 p}{dv^2} = -\frac{1}{a^2} p$$

qui s'annule pour $v = v_0$ sera

$$C \sin \frac{v - v_0}{a},$$

et la racine immédiatement supérieure à v_0 sera

$$v_0 + \pi a.$$

D'après la proposition de Sturm, cette racine doit être supérieure à v_1. Nous obtenons ainsi ce beau théorème de M. O. Bonnet, démontré dans les Notes citées plus haut :

Si, le long d'une ligne géodésique, le produit des rayons de courbure est positif et inférieur à a^2, la ligne ne peut être le plus court chemin dans un intervalle supérieur à πa (1).

On peut ajouter la proposition suivante, qui complète celle de M. Bonnet.

Supposons qu'en tous les points de l'arc $M_0 M_1$ on ait

$$-\frac{1}{RR'} \gtreqless -\frac{1}{b^2} \qquad \text{ou} \qquad RR' \geqq b^2.$$

Alors, si l'on considère l'équation

$$\frac{d^2 p}{dv^2} = -\frac{p}{b^2},$$

l'intervalle entre deux racines consécutives sera πb. Comme il ne saurait être inférieur, d'après la proposition de Sturm, à l'intervalle entre deux racines consécutives de la première, on est conduit au résultat suivant :

---

(1) M. Bonnet a déduit de sa proposition les conséquences suivantes :

Si, dans une surface fermée convexe, le produit des rayons de courbure est inférieur à a^2, la longueur de la droite qui joint deux points quelconques de la surface est certainement inférieure à πa.

Si, dans une surface convexe, le produit des rayons de courbure est inférieur à une quantité fixe a^2, la surface ne peut avoir de nappes infinies.

Si, en tous les points de la ligne géodésique, le produit des rayons de courbure est supérieur à b^2, la géodésique est plus courte que tous les chemins infiniment voisins dans un intervalle au moins égal à πb.

Considérons l'ellipsoïde, par exemple. La courbure en chaque point est donnée par la formule

$$RR' = \frac{a^2 b^2 c^2}{p^4},$$

a, b, c désignant les demi-axes et p la distance du centre au plan tangent (n° 504). Les valeurs extrêmes de RR' seront

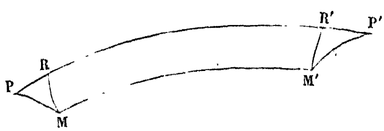
$$\frac{a^2 b^2}{c^2} \quad \text{et} \quad \frac{b^2 c^2}{a^2}.$$

Ainsi toute géodésique ne peut être le plus court chemin sur une longueur supérieure à $\frac{\pi ab}{c}$; elle sera certainement, sur toute longueur inférieure à $\pi \frac{bc}{a}$, plus petite que tous les chemins infiniment voisins réunissant ses extrémités.

631. La méthode suivie par M. Bonnet permet de trouver très simplement la variation de longueur d'un arc de courbe.

Soit en effet MM' une courbe qui se déplace et se déforme suivant une loi quelconque (*fig.* 48); considérons-la dans deux de ses

Fig. 48.



positions infiniment voisines MM', PP'. Élevons les géodésiques perpendiculaires à MM' et employons le système de coordonnées formé par ces lignes géodésiques et les courbes parallèles à MM'. On aura, pour l'élément linéaire, l'expression

$$ds^2 = du^2 + C^2 dv^2.$$

La variable u est la longueur portée sur les lignes géodésiques

à partir de MM′, prise avec un signe déterminé suivant qu'elle sera portée d'un côté ou de l'autre de MM′. Quant à la variable v, nous pouvons supposer qu'elle est égale à l'arc de la courbe MM′ compris entre une origine fixe et le pied de la géodésique (v). On aura encore

$$C = 1, \quad \text{pour} \quad u = 0,$$

mais la dérivée $\frac{\partial C}{\partial u}$ ne sera plus nulle pour la même valeur de u. Il résulte des formules du Livre V [II, p. 385 à 387] que la valeur de $-\frac{\partial C}{\partial u}$ pour $u=0$ est la courbure géodésique de MM′, comptée comme positive si le centre de courbure géodésique est du côté de MM′ qui correspond aux valeurs positives de u.

Cela posé, soient R et R′ les points où les géodésiques normales en M et M′ viennent couper PP′. On aura

$$\delta MM' = PP' - MM' = PR + P'R' + RR' - MM',$$

ou, en considérant les triangles infiniment petits RPM, R′P′M′,

$$\delta MM' = -PM\cos\widehat{PMM'} - P'M'\cos\widehat{P'M'M} + RR' - MM'. \tag{16}$$

En tous les points de RR′, u est une fonction infiniment petite de v. On aura donc

$$RR' = \int_M^{M'} \sqrt{u'^2 + C^2}\, dv,$$

ou, en développant C suivant les puissances de u et négligeant les infiniment petits du second ordre,

$$RR' = \int_M^{M'} \sqrt{u'^2 + 1 + 2u\left(\frac{\partial C}{\partial u}\right)_0} dv = \int_M^{M'} \left[1 + u\left(\frac{\partial C}{\partial u}\right)_0\right] dv,$$

ou enfin

$$RR' = MM' + \int_M^{M'} u\left(\frac{\partial C}{\partial u}\right)_0 dv. \tag{17}$$

Si nous portons cette valeur de RR′ dans la formule (16) et si nous remplaçons $\left(\frac{\partial C}{\partial u}\right)_0$ par son expression $\frac{-1}{\rho_g}$ au moyen de la courbure géodésique de MM′, nous aurons

$$\delta MM' = -PM\cos\widehat{PMM'} - P'M'\cos\widehat{P'M'M} - \int_M^{M'} u\frac{ds}{\rho_g}, \tag{18}$$

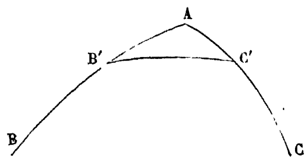
formule très intéressante et très utile, et qui ne contient que des éléments dont la définition géométrique et le signe ne laissent place à aucune difficulté.

632. Elle va nous permettre d'indiquer une série de conditions auxquelles doit satisfaire le plus court chemin entre deux points d'une surface limitée d'une manière quelconque.

1° Les portions qui seront à l'intérieur de la surface devront être formées de lignes géodésiques.

Cette propriété résulte immédiatement de ce qui a été démontré (nos 516 et 521). On peut la déduire aussi de la formule précédente. Si le rayon de courbure géodésique ρ_g n'est pas infini, il suffira en effet d'élever sur l'arc MM′ des perpendiculaires infiniment petites de même signe que ρ_g, c'est-à-dire dirigées du côté du centre de courbure géodésique, et s'annulant en outre pour les deux points M et M′. On aura ainsi remplacé MM′ par un chemin infiniment voisin et plus court, puisque l'expression de δ MM′ donnée par la formule précédente sera essentiellement négative.

Fig. 49.



2° Les portions de chemin qui font partie de la limite de la surface, si elles ne sont pas des géodésiques, devront satisfaire à la condition suivante : imaginons qu'en chaque point de la limite on mène celle des tangentes de la surface qui est normale à la courbe limite; il faudra que le centre de courbure géodésique de la courbe soit placé sur la portion de cette tangente qui est dirigée vers l'extérieur de la surface. En effet, si cette condition n'était pas remplie, on diminuerait la longueur du chemin en remplaçant un segment de cette courbe limite par une courbe infiniment voisine tracée sur la surface et réunissant les extrémités du segment.

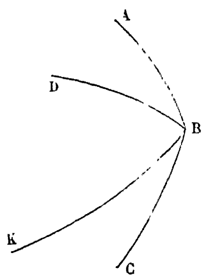
3° Si deux portions du chemin, tracées sur une même nappe, viennent se réunir (*fig.* 49) en un certain point de l'intérieur, elles

doivent se raccorder tangentiellement et de manière que l'une soit le prolongement de l'autre. Car, si ces portions BA, AC se rencontraient sous un angle différent de zéro, on abrégerait le chemin total en prenant B', C' infiniment voisins de A et substituant la route directe $B'C'$ au chemin $B'A + AC'$.

Il résulte de là que la portion du chemin comprise à l'intérieur de la surface doit se composer d'une seule ligne géodésique qui se continue sans interruption jusqu'à ce qu'on rencontre une limite ou une ligne singulière de la surface.

4° Si deux portions AB, BC du chemin le plus court ABC viennent se rencontrer en un point B (*fig.* 50) appartenant à la limite

Fig. 50.



DBK, il faudra que l'angle ABC soit inférieur ou égal à deux droits pour la même raison que précédemment.

5° Enfin, si la surface a des nappes différentes se coupant ou se raccordant suivant certaines lignes, le chemin le plus court ne pourra se briser et passer d'une nappe à l'autre qu'en faisant de part et d'autre des angles égaux avec la ligne de séparation.

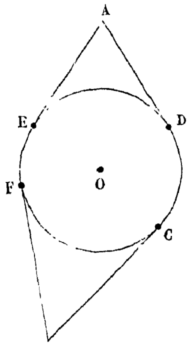
Nous allons indiquer quelques exemples simples propres à faciliter l'application de ces principes.

Soit d'abord une surface plane (*fig.* 51) à laquelle on aurait enlevé l'aire comprise à l'intérieur du cercle O, et proposons-nous de trouver le plus court chemin entre deux points A et B, choisis de telle manière que la droite AB rencontre la circonférence. Il résulte des propositions précédentes que le plus court chemin se composera de l'une des tangentes menées de A et de B à la circonférence et d'une portion de cette circonférence. On n'aura donc à choisir qu'entre les deux chemins AEFB et ADCB. Le plus

court est celui qui se trouve du même côté de O que la droite AB.

Supposons maintenant que le plan soit double et se compose de deux nappes raccordées suivant la circonférence O (*fig.* 52). C'est ce qui arriverait si l'on appliquait sur le plan une surface développable dont l'arête de rebroussement viendrait coïncider

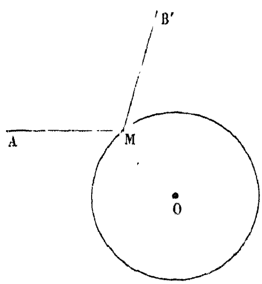
Fig. 51.



avec la circonférence O. Nous désignerons par les lettres sans accents les points de la première nappe et par les lettres accentuées ceux de la seconde.

Le plus court chemin d'un point A de la première nappe à un

Fig. 52.



point B' de la seconde devra, d'après les conditions énoncées, se composer sur chaque nappe d'une portion droite. De plus, les deux droites AM, B'M devront faire en M des angles égaux avec la circonférence.

On pourrait multiplier les exemples de ce genre; nous nous

contenterons de ceux qui précèdent. Mais nous ajouterons la remarque suivante, qui montrera toute l'extension que l'on pourrait donner à ce genre de recherches.

Considérons sur une surface quelconque tous les chemins possibles réunissant deux points donnés. Les études approfondies que l'on a été conduit à entreprendre dans la théorie moderne des fonctions ont montré qu'il existe un grand nombre de surfaces pour lesquelles on ne peut passer de l'un de ces chemins à tout autre, réunissant les mêmes points, par une déformation progressive et continue. Par exemple, sur un cylindre circulaire droit, il y aura des chemins allant d'un point A à un autre point B en faisant un nombre quelconque de tours, soit dans un sens, soit dans l'autre; et ces chemins ne seront pas réductibles les uns aux autres. Si l'on veut considérer une surface limitée, on pourra prendre le tore, pour lequel il y a lieu de faire les mêmes distinctions, la surface d'un ellipsoïde ou une portion de surface plane dans lesquelles on aurait enlevé les parties de la surface comprises à l'intérieur de différents traits fermés, etc. Dans un très intéressant Mémoire publié en 1866 ([1]), M. Jordan a montré comment on peut classer toutes ces routes différentes et les réduire à certains chemins élémentaires parfaitement définis. De cette manière, le problème que nous avons étudié dans ce Chapitre se présentera sous une forme nouvelle et plus générale. On pourra l'énoncer comme il suit :

Parmi tous les chemins réunissant deux points A *et* B *d'une surface et réductibles les uns aux autres par une déformation continue, déterminer celui qui est le plus court.*

Les propriétés *différentielles* que nous avons établies plus haut permettront d'étudier cette intéressante question, dont la discussion complète appartient évidemment à la Géométrie de situation. Le lecteur pourra examiner quelques cas simples, se rapportant à des cylindres ou à des surfaces planes percées de trous circulaires.

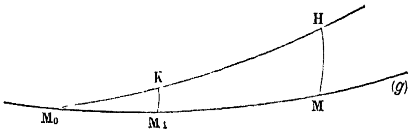
([1]) JORDAN (C.), *Sur la déformation des surfaces* (*Journal de Liouville*, 2e série, t. XI, p. 105; 1866).

Des contours tracés sur les surfaces (Même Recueil et même tome, p. 110).

633. Nous terminerons ce que nous avons à dire sur ce sujet en donnant quelques indications sur une notion nouvelle, celle de la *longueur réduite,* introduite par M. Christoffel dans la théorie des lignes géodésiques ([1]).

Soit (g) (*fig.* 53) une ligne géodésique dont les différents

Fig. 53.



points seront déterminés par leurs abscisses v, comptées à partir d'une origine fixe O prise sur cette ligne. Nous avons vu que, pour définir toute ligne géodésique infiniment voisine de (g), il faut élever au point d'abscisse v une perpendiculaire p satisfaisant à l'équation du second ordre

$$\frac{d^2p}{dv^2} = -\frac{p}{RR'}; \tag{19}$$

le lieu de l'extrémité de cette perpendiculaire sera la ligne géodésique cherchée. Par conséquent, si l'on veut obtenir celles de ces lignes qui passent en M_0, il faudra prendre les solutions de l'équation précédente qui se réduisent à zéro pour le point M_0. Ces solutions ne diffèrent les unes des autres que par un facteur constant; distinguons et désignons par la notation $[M_0 M]$ celle dont la dérivée $\frac{dp}{dv}$ se réduit à 1 pour le point M_0. On pourra dire alors que toute ligne géodésique passant par M_0 est définie par l'équation

$$p = \alpha[M_0 M], \tag{20}$$

où α désigne une constante infiniment petite. Proposons-nous de déterminer l'angle θ que fait en M_0 cette ligne géodésique avec la ligne (g). Nous considérerons pour cela le triangle $M_0 M_1 K$, en

([1]) CHRISTOFFEL (E.-B.), *Allgemeine Theorie der geodätischen Dreiecke* (*Abhandlungen der Königlichen Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, p. 119-176; 1868).

supposant le point M_1 infiniment voisin de M_0. Comme il est rectangle en M_1, nous aurons

$$\theta = \frac{M_1 K}{M_0 M_1} = \left[\frac{dp}{dv}\right]_{M_0},$$

en négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur au premier. En vertu de la définition de la solution $[M_0 M]$, on aura donc

$$\theta = \alpha.$$

De là résulte le théorème suivant, dû à M. Christoffel.

Donnons à la solution $[M_0 M]$ de l'équation (19), qui est définie par la double condition de se réduire à o pour M_0 et d'avoir sa dérivée égale à 1 pour le même point, le nom de *longueur réduite* du segment géodésique M_0M. *Si, par le point* M_0, *on mène une ligne géodésique faisant avec la première l'angle infiniment petit* θ *et qu'on élève en* M *l'arc perpendiculaire* MH *jusqu'à la rencontre de cette ligne géodésique, on aura*

$$\text{(21)} \qquad MH = \theta [M_0 M].$$

Si v_0 et v sont les abscisses des points M_0 et M, on aura, comme nous l'avons déjà vu (n° 628),

$$\text{(22)} \qquad [M_0 M] = \varphi(v_0)\varphi(v)\int_{v_0}^{v} \frac{dv}{\varphi^2(v)},$$

$\varphi(v)$ désignant une solution de l'équation différentielle qui ne s'annule pas pour $v = v_0$.

Nous voyons, d'après cette formule, que l'on a

$$[M_0 M] + [M M_0] = 0.$$

Si l'on connaît deux solutions $\varphi(v)$, $\psi(v)$ de l'équation différentielle, satisfaisant nécessairement à une relation de la forme

$$\varphi(v)\psi'(v) - \psi(v)\varphi'(v) = C,$$

on trouvera

$$\text{(23)} \qquad [M_0 M] = \frac{\varphi(v_0)\psi(v) - \varphi(v)\psi(v_0)}{C},$$

et cette nouvelle expression de la *distance réduite* permet de

démontrer immédiatement une relation

$$[ab][cd] + [ac][db] + [ad][bc] = 0, \tag{24}$$

qui a été donnée par M. Christoffel.

Si, sur toutes les lignes géodésiques passant par M_0 (*fig.* 53), on porte une longueur égale à M_0M, on obtiendra une trajectoire orthogonale à toutes ces lignes géodésiques qui passent en M_0. Le rayon de courbure géodésique de cette trajectoire orthogonale au point M sera donné par la formule

$$\frac{1}{\rho_g} = \frac{-1}{[M_0M]} \frac{d[M_0M]}{dv}, \tag{25}$$

que nous nous contenterons d'indiquer.

Il résulte des développements donnés plus haut que les propriétés essentielles de la longueur réduite avaient été utilisées par M. O. Bonnet avant que cet élément eût été défini par M. Christoffel.

CHAPITRE VI.

LA COURBURE GÉODÉSIQUE ET LE THÉORÈME DE GAUSS.

Définitions diverses de la courbure géodésique. — Généralisation de différentes propositions relatives à la courbure des lignes planes. — Définition due à M. Beltrami de la courbure géodésique. — Détermination de toutes les surfaces dont les lignes de courbure ont leur courbure géodésique constante. — Le théorème de Green pour une aire à connexion simple. — Formule de M. O. Bonnet. — Théorème de Gauss relatif à la courbure totale d'un polygone dont les côtés sont des lignes géodésiques. — Définition de l'angle de contingence géodésique. — Formule de M. Liouville, expression de la courbure totale en un point de la surface au moyen des courbures géodésiques des deux lignes coordonnées. — Application de cette formule à un problème de M. Tchebycheff. — Le théorème de Green pour une aire à connexion multiple. — Applications diverses. — Le théorème de Gauss relatif à la courbure d'un polygone géodésique ne constitue pas une propriété caractéristique des lignes géodésiques.

---

634. Après avoir développé les principales propositions relatives aux lignes géodésiques, nous allons étudier d'une manière détaillée la courbure géodésique. Nous avons vu qu'elle est donnée par la formule

$$\frac{ds}{\rho_g} = d\omega + r\,du + r_1\,dv. \tag{1}$$

Le centre de courbure géodésique, c'est-à-dire le centre de courbure de la projection de la courbe sur le plan tangent, admet pour coordonnées relativement au trièdre mobile (T)

$$x = -\rho_g \sin\omega, \qquad y = \rho_g \cos\omega.$$

Par conséquent, le rayon vecteur qui joint le point de la surface au centre de courbure géodésique fera avec l'axe des x du trièdre (T) un angle égal à $\omega + \frac{\pi}{2}$ ou $\omega - \frac{\pi}{2}$ suivant que ρ_g sera positif ou négatif.

La courbure géodésique étant un élément des plus importants, nous en ferons connaître successivement différentes expressions.

Au premier rang, il faut placer la suivante : nous avons vu (n° 631) que, si l'on considère un arc quelconque MM′ et si l'on porte des longueurs infiniment petites λ sur les géodésiques normales à cette courbe de manière à obtenir un arc infiniment voisin RR′, l'accroissement de MM′ est défini par la formule

$$\delta\, \mathrm{MM}' = -\int_{\mathrm{M}}^{\mathrm{M}'} \frac{\lambda\, ds}{\rho_g},$$

pourvu que l'on donne à λ et à ρ_g le même signe quand ces grandeurs sont portées dans le même sens.

L'élément ds étant toujours positif, on a, d'après un théorème connu,

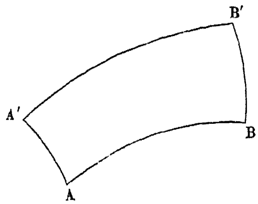
$$\delta\, \mathrm{MM}' = -\, \mathrm{MM}' \left(\frac{\lambda}{\rho_g}\right),$$

$\left(\frac{\lambda}{\rho_g}\right)$ désignant la valeur de $\frac{\lambda}{\rho_g}$ prise pour un point inconnu de l'arc MM′ ou encore une moyenne entre la plus petite et la plus grande des valeurs de $\frac{\lambda}{\rho_g}$ relatives aux points compris entre M et M′.

Si nous supposons que l'arc MM′ se réduise à l'arc infiniment petit AB (*fig.* 54), la formule précédente nous donnera

$$\frac{\mathrm{A'B'} - \mathrm{AB}}{\mathrm{AB}} = -\,\frac{\mathrm{AA'}}{\rho_g},$$

Fig. 54.



ρ_g différant infiniment peu du rayon de courbure de AB en A. On peut obtenir un résultat beaucoup plus général par une interprétation directe des formules qui donnent la courbure géodésique.

635. Supposons la surface rapportée à des coordonnées rectangulaires quelconques et soit

$$ds^2 = \mathrm{A}^2\, du^2 + \mathrm{C}^2\, dv^2$$

l'expression de l'élément linéaire.

Le rayon de courbure géodésique de la courbe $v = \text{const.}$ sera donné (n° 507) par la formule

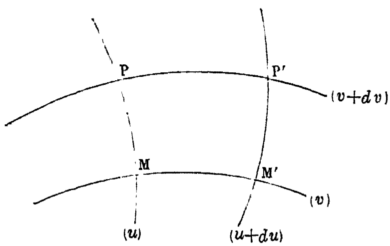
$$\frac{1}{\rho} = -\frac{1}{AC}\frac{\partial A}{\partial v},$$

les coordonnées du centre de courbure géodésique étant

$$x_1 = 0, \qquad y_1 = \rho.$$

Construisons les quatre courbes coordonnées (u), $(u+du)$, (v), $(v+dv)$, qui forment le quadrilatère curviligne MM'PP' (*fig.* 55).

Fig. 55.



On aura

$$MM' = A\,du, \qquad MP = C\,dv$$

et, par conséquent,

$$PP' = A\,du + \frac{\partial}{\partial v}(A\,du)\,dv;$$

ce qu'on peut écrire

$$PP' - MM' = \frac{\partial A}{\partial v}\,du\,dv.$$

L'expression de ρ pourra donc être présentée sous la forme

$$(2) \qquad \frac{1}{\rho} = -\frac{PP' - MM'}{MP.MM'}.$$

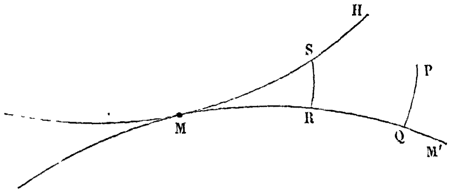
C'est le résultat auquel nous avions été conduits plus haut; mais, dans la première méthode, nous supposions que les trajectoires orthogonales de la courbe (v) étaient des géodésiques, tandis que ce sont maintenant des courbes se succédant d'après une loi quelconque.

636. Nous avons ainsi une première définition dans laquelle

on n'a pas à sortir de la surface. En voici une autre de même nature.

Étant donnée une courbe quelconque MH (*fig.* 56), menons la géodésique MM′ tangente en M; pour déterminer les points de la surface, nous prendrons des abscisses $MQ = v$ sur cette ligne géodésique et nous élèverons en Q des perpendiculaires géodésiques $PQ = u$.

Fig. 56.



L'élément linéaire aura pour expression

$$ds^2 = du^2 + C^2\, dv^2, \tag{3}$$

et l'on aura pour $u = 0$

$$C = 1, \qquad \frac{\partial C}{\partial u} = 0.$$

Le développement de C suivant les puissances de u sera donc de la forme

$$C = 1 + hu^2 + \ldots, \tag{4}$$

h étant une fonction de v.

L'équation de la courbe MH permettra de développer u en série suivant les puissances de v. On aura, pour les points de cette courbe voisins de M,

$$u = kv^2 + k'v^3 + \ldots.$$

Calculons la courbure géodésique de la courbe en M. On a ici

$$\frac{ds}{\rho_g} = d\omega + \frac{\partial C}{\partial u}\, dv, \qquad \frac{du}{C\, dv} = \cot\omega.$$

En se bornant aux premiers termes des développements, on trouve

$$ds = dv, \qquad \cot\omega = 2kv, \qquad \omega = \frac{\pi}{2} - 2kv$$

et, par conséquent,

$$\frac{1}{\rho_g} = -2k.$$

Remplaçons k par sa valeur dans le développement de u; nous trouverons que l'on a, pour tous les points de la courbe MH qui sont dans le voisinage du point M,

$$u = -\frac{v^2}{2\rho_g},$$

c'est-à-dire

$$\text{RS} = -\frac{\overline{\text{MR}}^2}{2\rho_g}, \tag{5}$$

ce qui est la généralisation d'une formule bien connue relative aux courbes planes ([1]).

637. On pourra lire dans le *Traité de Calcul différentiel* de M. J. Bertrand des démonstrations purement géométriques qui permettent de rattacher les unes aux autres les propriétés précédentes. Nous rencontrerons plus loin (n° 641) d'autres expressions de la courbure géodésique. Pour le moment, nous nous contenterons de signaler la définition suivante, dans laquelle on sort de la surface pour construire le centre de courbure géodésique.

Étant donnée une courbe AB (*fig.* 57), imaginons que l'on mène en ses différents points les tangentes MK, M′K′, ... de la surface qui sont normales à la courbe. Ces tangentes forment une surface réglée : *Le point de chaque génératrice* MK *pour lequel le plan tangent à cette surface réglée est normal au plan tangent en* M *est précisément le centre de courbure géodésique de la courbe* AB, *pour le point* M. *Si la surface réglée est développable, le centre de courbure géodésique sera le point de contact de chaque génératrice rectiligne avec l'arête de rebroussement.*

Pour établir cette proposition, supposons la surface rapportée au système de coordonnées déterminé par les géodésiques perpen-

---

([1]) Le signe — provient de ce que ρ_g est considéré comme positif quand il est porté dans le sens correspondant à l'angle $\omega + \frac{\pi}{2}$.

diculaires à AB et par leurs trajectoires orthogonales. L'élément linéaire de la surface aura la forme si souvent employée

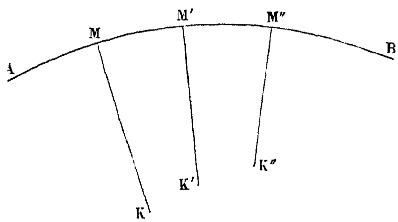
$$ds^2 = du^2 + C^2\,dv^2. \tag{6}$$

Considérons le trièdre (T) déjà défini et dont l'axe des x est la tangente à la géodésique. Si on lui imprime un déplacement de telle manière que le sommet décrive une courbe quelconque, un point de l'axe des x décrira un arc infiniment petit, dont les projections sur les arêtes du trièdre seront respectivement

$$du + dx, \quad (C + r_1 x)\,dv, \quad -(q\,du + q_1\,dv)x,$$

d'après les formules du n° 499 [II, p. 370]. Supposons d'abord qu'on se déplace suivant la courbe AB; v variera seule et, pour

Fig. 57.



que le déplacement s'effectue dans un plan perpendiculaire au plan tangent en M, c'est-à-dire pour que le plan tangent au point considéré à la surface réglée engendrée par MK soit normal au plan tangent en M, il faudra que la projection du déplacement sur l'axe des y soit nulle, c'est-à-dire que l'on ait

$$C + r_1 x = 0.$$

On tire de là

$$x = -\frac{C}{r_1} = -\frac{C}{\dfrac{\partial C}{\partial u}},$$

et cette valeur de x détermine précisément le centre de courbure géodésique de la courbe AB. Notre proposition est donc établie. On en déduit la conséquence suivante :

Imaginons qu'on mène toutes les tangentes aux géodésiques $v =$ const., c'est-à-dire aux géodésiques normales à la courbe

donnée. On formera une congruence rectiligne admettant une surface focale dont l'une des nappes sera la surface proposée. Nous allons montrer que la seconde nappe sera le lieu des centres de courbure géodésique de AB et des courbes parallèles à AB.

Remarquons d'abord que les droites de la congruence, étant tangentes à une famille de géodésiques tracées sur la surface proposée, sont, par cela même, normales à une surface (n° 441). Par suite, si l'on envisage une surface réglée quelconque formée avec les droites de la congruence, les plans tangents à cette surface aux deux points focaux de l'une quelconque de ses génératrices seront nécessairement rectangulaires.

Si l'on applique cette remarque à la surface réglée engendrée par MK quand le point M décrit la courbe AB, on reconnaîtra immédiatement que le second point focal de MK est le point où le plan tangent à la surface réglée est perpendiculaire au plan tangent en M. C'est donc, d'après ce que nous avons établi, le centre de courbure géodésique de AB.

Ainsi, *lorsque des droites sont normales à une surface* (Σ) *et forment une congruence dont la surface focale est constituée par les deux nappes de la surface des centres de courbure de* (Σ), *les arêtes de rebroussement des développables que l'on peut obtenir avec ces droites engendrent deux familles de géodésiques situées respectivement sur les deux nappes de la surface des centres. Les courbes parallèles qui coupent à angle droit l'une de ces familles de géodésiques ont leurs centres de courbure géodésique situés sur l'autre nappe de la surface des centres.*

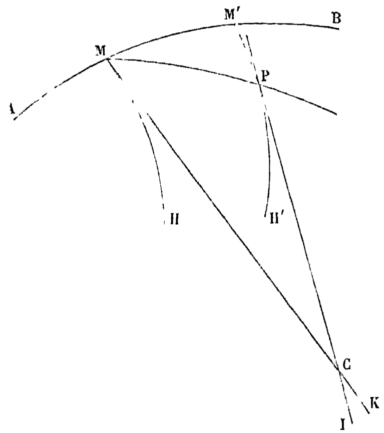
Cette proposition si générale, sur laquelle nous reviendrons plus loin, permet de démontrer directement l'un des beaux théorèmes que la Géométrie des surfaces doit à M. Weingarten. Pour le moment, nous en déduirons seulement le corollaire suivant.

Nous avons considéré les géodésiques normales à AB. Dans le plan et, par conséquent, pour les surfaces développables, la définition de la courbure peut se rattacher au point d'intersection de deux géodésiques normales infiniment voisines. On n'obtiendrait rien en essayant, pour une surface quelconque, une généralisation dans cette voie; car, en modifiant la définition de la surface à une

distance finie de la courbe AB, on change complètement le cours et les intersections successives des lignes géodésiques. Mais on peut opérer de la manière suivante.

Traçons (*fig.* 58) les géodésiques successives MH, M′H′, ..., normales à la courbe AB, et la tangente MK en M à la géodésique MH. Si l'on mène à la seconde géodésique M′H′ une tan-

Fig. 58.



gente PI dont le point de contact sera choisi par la condition qu'elle rencontre MK, il est clair que *le point d'intersection* C *des deux droites sera le centre de courbure géodésique de l'arc* MM′. Car, dans la congruence formée par les tangentes aux géodésiques, le point C, étant l'intersection de deux droites infiniment voisines, sera le second point focal de MK.

Quand la surface devient plane, la construction précédente se réduit à celle qui donne le centre de courbure par l'intersection de deux normales infiniment voisines ([1]).

Si l'on construit les différentes géodésiques M′H′ voisines de MH, le lieu du point P relatif à chacune d'elles sera évidemment celle des courbes conjuguées de toutes ces géodésiques qui passe au point M.

([1]) Cette construction du centre de courbure géodésique est due à M. Beltrami. *Voir* le Mémoire intitulé *Ricerche di Analisi applicata alla Geometria* (*Journal de Battaglini*, t. II; 1864).

Dans le cas d'une ligne de courbure, cette conjuguée des géodésiques normales coïncide avec la ligne de courbure elle-même. Nous avons donc le théorème suivant :

Le lieu des centres de courbure géodésique d'une ligne de courbure est celle des développées de cette courbe qui est l'enveloppe des normales à la courbe situées dans le plan tangent à la surface, ou, ce qui est la même chose, qui est l'arête de rebroussement de la développable enveloppée par les plans tangents à la surface en tous les points de la ligne de courbure.

638. Si la ligne de courbure a son rayon de courbure géodésique constant, la développée précédente devra se réduire à un point et, par conséquent, *la ligne de courbure devra être située sur une sphère coupant la surface à angle droit.*

Cette dernière conséquence a été déjà signalée par M. Ribaucour (¹). Elle a permis à cet habile géomètre de donner une solution géométrique d'une question déjà résolue analytiquement par M. O. Bonnet (²): *Déterminer toutes les surfaces pour lesquelles toutes les lignes de courbure ont leur courbure géodésique constante.*

Il résulte, en effet, de la remarque faite par M. Ribaucour que les lignes de courbure de chaque famille devront être sur une série de sphères coupant la surface à angle droit. Comme les sphères qui contiennent deux lignes de courbure appartenant à des familles différentes se coupent nécessairement à angle droit, nous aurons en premier lieu à résoudre le problème suivant :

Déterminer deux familles de sphères jouissant de la propriété que chaque sphère de l'une des familles coupe à angle droit toutes celles de l'autre.

On connaît la solution de cette question et l'on sait que, par une inversion réelle, on peut toujours amener l'une des familles à être composée, soit de sphères concentriques ou de plans parallèles,

(¹) Ribaucour, *Sur la théorie des surfaces* (*Bulletin de la Société philomathique*, p. 24 ; 1870).

(²) O. Bonnet, *Mémoire sur la théorie des surfaces applicables* (*Journal de l'École Polytechnique*, XLIIᵉ Cahier, p. 132 et suivantes; 1867).

soit de plans passant par une droite. Dans le premier cas, la surface, étant coupée à angle droit par une série de sphères concentriques ou par une série de plans parallèles, ne peut être qu'un cône ou un cylindre. Dans le second cas, la surface, étant coupée à angle droit par tous les plans qui passent par une droite, est nécessairement une surface de révolution, admettant cette droite pour axe. Nous avons donc le résultat suivant :

Les seules surfaces dont toutes les lignes de courbure aient leur courbure géodésique constante sont les surfaces de révolution, les cônes, les cylindres et les transformées de ces surfaces par inversion.

639. Nous aurons, dans ce qui va suivre, à nous appuyer sur le théorème de Green qui donne la transformation d'une intégrale curviligne en une intégrale double. Nous allons d'abord présenter quelques remarques sur ce théorème et ses applications à la théorie des surfaces.

Considérons une portion de surface à connexion simple, limitée par un contour $AA'BB'$ (*fig.* 59); et soit

$$\int (M\,du + N\,dv)$$

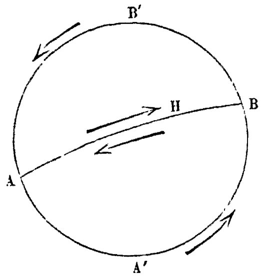
une intégrale relative à ce contour, que l'on supposera parcouru dans le sens de la flèche.

Supposons que les fonctions M et N de u et de v restent finies, uniformes et continues et qu'elles admettent des dérivées pour tous les points à l'intérieur du contour. Le théorème de Green nous apprend que l'intégrale simple précédente peut être remplacée par une intégrale double relative à toute l'aire limitée par ce contour. Les remarques suivantes conduisent à ce résultat par la voie qui nous paraît la plus naturelle.

Le caractère essentiel d'une intégrale double, d'une fonction de surface, est évidemment le suivant : si l'on décompose par des sections la surface en deux ou plusieurs parties, l'intégrale totale est la somme de celles qui sont relatives à ces diverses parties. Or il est aisé de voir que cette propriété appartient à notre intégrale curviligne ; car, si l'on découpe l'aire en deux parties par la ligne AHB, l'intégrale relative au contour primitif $AA'BB'$ est la somme

des intégrales relatives aux deux contours partiels AA′BHA, AHBB′A que l'on peut former avec AB. En continuant ainsi à effectuer des sections et à décomposer les contours, on verra que l'intégrale primitive peut être remplacée par la somme des intégrales relatives à des contours infiniment petits, parcourus dans le

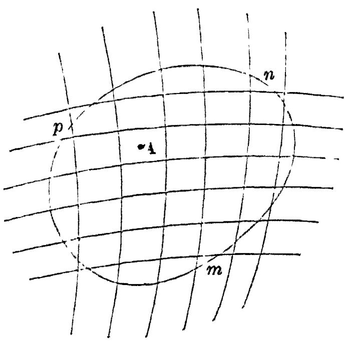
Fig. 59.



même sens que le contour primitif. Or il est très aisé de montrer que de telles intégrales curvilignes sont proportionnelles à l'aire du contour auquel elles se rapportent.

Considérons, en effet, un contour infiniment petit mnp (*fig.* 60); nous commencerons par supposer que les courbes coor-

Fig. 60.



données qui se croisent dans son intérieur forment un système de mailles analogue à celui que l'on obtient dans le plan avec les coordonnées de Descartes. Alors les coordonnées u et v varieront infiniment peu dans l'intérieur du contour, et, si u_0, v_0 désignent les valeurs de ces coordonnées pour un point A de l'intérieur,

les différences $u - u_0$, $v - v_0$ seront infiniment petites pour tous les points à l'intérieur du contour. C'est ce qui n'aurait pas lieu si l'on employait, par exemple, des coordonnées polaires ayant leur pôle en A; v désignant l'angle polaire, cette coordonnée prendrait toutes les valeurs possibles à l'intérieur du contour.

Puisque les différences $u - u_0$, $v - v_0$ sont infiniment petites, on pourra développer M et N par la série de Taylor. On aura

$$M = M_0 + \left(\frac{\partial M}{\partial u}\right)_0 (u - u_0) + \left(\frac{\partial M}{\partial v}\right)_0 (v - v_0) + \ldots,$$
$$N = N_0 + \left(\frac{\partial N}{\partial u}\right)_0 (u - u_0) + \left(\frac{\partial N}{\partial v}\right)_0 (v - v_0) + \ldots,$$

l'indice o indiquant les valeurs des fonctions pour le point A. Par conséquent, on aura

$$\begin{aligned}\int (M\,du + N\,dv) = \quad & M_0 \int du + \left(\frac{\partial M}{\partial u}\right)_0 \int (u - u_0)\,du + \left(\frac{\partial M}{\partial v}\right)_0 \int (v - v_0)\,du \\ & + N_0 \int dv + \left(\frac{\partial N}{\partial u}\right)_0 \int (u - u_0)\,dv + \left(\frac{\partial N}{\partial v}\right)_0 \int (v - v_0)\,dv + \end{aligned}$$

les termes non écrits n'ayant, on le reconnaîtra aisément, aucune influence sur le résultat final parce qu'ils sont infiniment petits par rapport à l'aire comprise à l'intérieur du contour.

La première, la deuxième, la quatrième et la sixième intégrale de la formule précédente sont évidemment nulles quand on les étend à tout le contour. Il nous reste donc à examiner seulement les deux termes

$$\left(\frac{\partial M}{\partial v}\right)_0 \int (v - v_0)\,du + \left(\frac{\partial N}{\partial u}\right)_0 \int (u - u_0)\,dv.$$

Or on a

$$(7) \qquad \int (u - u_0)\,dv = -\int (v - v_0)\,du = \iint du\,dv,$$

l'intégrale double étant étendue à toute l'aire limitée par le contour. On peut donc écrire

$$\int (M\,du + N\,dv) = \left(\frac{\partial N}{\partial u} - \frac{\partial M}{\partial v}\right)_0 \iint du\,dv.$$

Il suit de là que l'intégrale curviligne primitive peut être remplacée par l'intégrale double dont l'élément est le second terme

de la formule précédente, et l'on a

$$(8)\qquad \int (\mathrm{M}\,du + \mathrm{N}\,dv) = \int\int \left(\frac{\partial \mathrm{N}}{\partial u} - \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial v}\right) du\,dv.$$

C'est la formule de Green ([1]).

La démonstration précédente est évidemment inférieure sous le rapport de la rigueur à celle que l'on donne habituellement et que l'on pourra consulter, par exemple, dans le Cours de M. Hermite ([2]); mais elle offre l'avantage de bien faire saisir la raison de cette transformation si curieuse d'une intégrale simple en une intégrale double; elle nous montre aussi que, s'il existe des points où toutes les courbes coordonnées d'un système viennent se croiser, il faudra les entourer d'une petite courbe, et l'intégrale curviligne primitive sera égale à la somme des intégrales relatives à ces courbes infiniment petites, augmentée de l'intégrale double étendue à toute la portion de l'aire qui est extérieure à ces courbes.

640. Appliquons le théorème de Green à l'équation qui donne le rayon de courbure géodésique

$$(9)\qquad \frac{ds}{\rho_g} = d\omega + r\,du + r_1\,dv.$$

([1]) D'après la manière même dont on a obtenu cette formule, on déterminera sans difficulté le signe qu'il faut donner, dans l'intégrale double, à l'élément $du\,dv$. Il résulte, en effet, des équations (7) que, si l'on considère, par exemple, l'élément de surface compris entre les courbes de paramètres u, $u+du$, v, $v+dv$, on a

$$du\,dv = \frac{1}{2}\int (u\,dv - v\,du),$$

l'intégrale curviligne s'appliquant au contour qui limite cette aire, *parcouru dans le même sens que le contour primitif*. De là on déduira facilement la règle suivante.

Définissons comme sens positif sur chacune des courbes coordonnées le sens dans lequel augmente la coordonnée qui demeure variable sur cette courbe. L'élément $du\,dv$ devra être positif si, pour un point à l'intérieur de cet élément, la rotation qui amène la partie positive de la courbe de paramètre v du côté de la partie positive de la courbe de paramètre u est de même sens que la rotation autour du contour total; il sera négatif dans le cas contraire.

([2]) HERMITE, *Cours autographié de la Faculté des Sciences*, 3[e] édition, 8[e] Leçon; 1887.

Nous aurons donc

$$\int d\omega - \int \frac{ds}{\rho_g} = -\int (r\,du + r_1\,dv),$$

les intégrales étant étendues à tout contour fermé. On a, d'ailleurs, en vertu de la formule (8),

$$\int (r\,du + r_1\,dv) = \int\int \left(\frac{\partial r_1}{\partial u} - \frac{\partial r}{\partial v}\right) du\,dv.$$

On est ainsi conduit à la relation fondamentale

$$(10)\qquad \int d\omega - \int \frac{ds}{\rho_g} = \int\int \left(\frac{\partial r}{\partial v} - \frac{\partial r_1}{\partial u}\right) du\,dv,$$

où l'on peut transformer le second membre, en employant l'expression de la courbure totale donnée au n° 496. On obtient ainsi la formule entièrement *géométrique*

$$(11)\qquad \int d\omega - \int \frac{ds}{\rho_g} = \int\int \frac{d\sigma}{RR'},$$

l'intégrale double étant étendue à toute l'aire comprise dans le contour et $d\sigma$ désignant l'élément de cette aire, pris avec le signe qui lui appartient (¹).

Cette équation, où figure le rayon de courbure géodésique, a été donnée pour la première fois par M. Bonnet (²). Toutes les quantités qui y figurent sont parfaitement définies; ω est l'angle de la tangente au contour supposé parcouru dans le sens direct avec l'axe des x du trièdre (T); le rayon ρ_g doit être considéré comme positif ou négatif suivant qu'il est porté dans le sens correspondant à l'angle $\omega + \frac{\pi}{2}$ ou en sens contraire. Elle ne peut cesser d'être vraie que s'il est impossible de rapporter l'intérieur de l'aire à

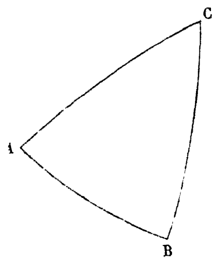
(¹) Voici comment on déterminera ce signe. Soient A un point quelconque de la surface à l'intérieur de $d\sigma$ et (T) le trièdre relatif à ce point. On peut considérer $d\sigma$ comme un petit élément situé dans le plan des xy de ce trièdre. Si l'on tourne dans ce plan autour de l'origine et dans le même sens que sur le contour limite, il faudra donner à $d\sigma$ le signe + ou le signe — suivant que la rotation se fera de l'axe des x vers l'axe des y ou en sens contraire. C'est la règle suivie habituellement, d'après Gauss et Möbius, pour fixer le signe d'une aire.

(²) O. Bonnet, *Mémoire sur la théorie générale des surfaces* (*Journal de l'École Polytechnique,* XXXIIᵉ Cahier, p. 124; 1848).

un système de coordonnées satisfaisant à toutes les conditions énoncées dans la démonstration du théorème de Green. Nous allons en faire différentes applications.

641. Considérons d'abord un triangle géodésique ABC (*fig.* 61). Si le contour ne présentait pas les points saillants A, B, C, l'intégrale $\int d\omega$ serait évidemment égale à 2π; car la tangente a fait un tour complet quand on revient au point de départ. Pour

Fig. 61.



avoir la valeur de cette intégrale, il faudra donc retrancher de 2π les angles dont la tangente tourne en A, B, C, c'est-à-dire $\pi - A$, $\pi - B$, $\pi - C$. Comme la courbure $\frac{1}{\rho_g}$ est nulle en chaque point du contour, la formule (11) nous donne

$$A + B + C - \pi = \int\int \frac{d\sigma}{RR'}. \tag{12}$$

C'est le théorème célèbre de Gauss.

La démonstration précédente suppose évidemment que le triangle géodésique suffit à limiter une portion de la surface, ce qui n'a pas toujours lieu dans les surfaces à connexion multiple, telles que le tore. Mais on pourrait objecter encore que, peut-être, toutes les conditions indiquées pour l'application du théorème de Green ne se trouveront pas réalisées. Pour écarter toutes ces difficultés, on peut remarquer avec M. Bertrand que le théorème de Gauss est nécessairement vrai pour un triangle géodésique fini dès qu'il est établi pour un triangle infiniment petit. Si l'on décompose en effet, par des sections géodésiques, le triangle ABC en triangles plus petits, on reconnaîtra que l'égalité relative à ce

triangle résulte de l'addition de toutes celles qui se rapportent aux triangles partiels. Il résulte de cette remarque que le théorème de Gauss est toujours vrai dès que le triangle géodésique suffit, à lui seul, à limiter une portion continue de la surface, ne contenant aucun point singulier dans son intérieur; car toutes les conditions supposées dans la démonstration sont évidemment vérifiées pour des triangles suffisamment petits limitant une aire qui ne renferme aucune singularité.

La démonstration précédente s'applique également à un polygone dont les côtés sont des lignes géodésiques; et elle nous montre que *la courbure totale d'une portion de la surface limitée par un polygone dont les côtés sont des lignes géodésiques est égale à l'excès de la somme des angles de ce polygone sur autant de fois le nombre π qu'il y a de côtés moins deux*. Au reste, cette proposition plus générale est un simple corollaire du théorème de Gauss et peut s'en déduire par la décomposition du polygone en triangles.

Il est inutile de faire remarquer que le théorème de Gauss peut être envisagé comme une belle généralisation de la proposition d'Albert Girard relative à l'aire du triangle sphérique. Si on l'applique, en effet, à une surface de courbure constante et égale à l'unité, on reconnaît immédiatement qu'il donne l'aire d'un triangle géodésique en fonction des angles de ce triangle; et l'expression ainsi obtenue est identique, comme il fallait s'y attendre, à celle que l'on connaît depuis longtemps pour le triangle sphérique. Le même théorème, appliqué à une surface de courbure constante mais négative, nous montre que, dans toute surface de ce genre, la somme des angles d'un triangle géodésique est inférieure à deux droits, et que le *déficit* mesure précisément l'aire du triangle géodésique. Nous aurons l'occasion de revenir sur ces remarques.

642. Nous allons maintenant indiquer une application d'une nature toute différente, qui nous conduira à une expression nouvelle de la courbure géodésique. Soit AB (*fig.* 62) un arc de courbe quelconque; menons les géodésiques AC, BC tangentes en A et B. Nous formerons ainsi un contour ABC auquel on pourra appliquer la formule générale.

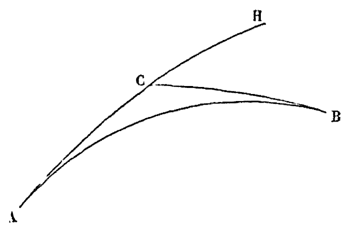
En raisonnant comme dans le cas du triangle géodésique, on trouve

$$\int d\omega = A + B + C - \pi = -\widehat{BCH},$$

et, par conséquent, la formule (10) nous donne ici

$$-\int_A^B \frac{ds}{\rho_g} - \widehat{BCH} = \iint \frac{d\sigma}{RR'}.$$

Fig. 62.



Si nous supposons l'arc AB infiniment petit, l'intégrale double du second membre est du troisième ordre, comme l'aire du triangle ABC. On a d'ailleurs, en négligeant les infiniment petits du second ordre,

$$\int_A^B \frac{ds}{\rho_g} = \frac{ds}{\rho_{gA}},$$

ρ_{gA} désignant le rayon de courbure géodésique en A. Il vient donc

$$\frac{ds}{\rho_{gA}} = -\widehat{BCH}, \tag{13}$$

le rayon de courbure étant, d'après nos conventions, considéré comme positif lorsqu'il sera dirigé du côté de C.

L'angle BCH de deux géodésiques tangentes infiniment voisines a reçu de M. Liouville le nom d'*angle de contingence géodésique* (¹). On voit que son expression, tout à fait semblable à celle que l'on emploie dans la théorie des courbes planes, nous fournit une définition nouvelle de la courbure géodésique. Cette

(¹) LIOUVILLE (J.), *Sur la théorie générale des surfaces* (*Journal de Liouville*, t. XVI, p. 130; 1851).

définition, que l'on peut d'ailleurs établir directement, permet de rattacher la formule générale de M. Bonnet à celle de Gauss : il suffira de remplacer chaque courbe par un polygone circonscrit formé d'un nombre illimité de lignes géodésiques.

Comme on a, en négligeant seulement les termes du troisième ordre,

$$\int_A^B \frac{ds}{\rho_g} = \frac{ds}{2}\left(\frac{1}{\rho_{gA}} + \frac{1}{\rho_{gB}}\right),$$

on pourra substituer à la relation (13) la suivante

$$\frac{ds}{2}\left(\frac{1}{\rho_{gA}} + \frac{1}{\rho_{gB}}\right) = -\widehat{BCH}, \tag{14}$$

dans laquelle les erreurs commises sont seulement de l'ordre de ds^3.

643. Il ne nous reste plus, pour achever l'étude de la courbure géodésique, qu'à faire connaître une formule élégante, due à M. Liouville, qui permet d'exprimer la courbure totale de la surface au moyen des rayons de courbure géodésique des courbes coordonnées.

Supposons l'élément linéaire donné par la formule

$$ds^2 = A^2\,du^2 + 2AC\cos\alpha\,du\,dv + C^2\,dv^2. \tag{15}$$

Nous avons obtenu, pour les courbures géodésiques des lignes coordonnées, les expressions suivantes [II, p. 391]

$$\frac{C}{\rho_{gv}} = \frac{\partial n}{\partial v} + r_1, \qquad \frac{A}{\rho_{gu}} = \frac{\partial m}{\partial u} + r. \tag{16}$$

Si l'on porte les valeurs de r, r_1 déduites de ces équations dans l'expression (15) de la courbure [II, p. 364], on aura

$$\frac{AC\sin\alpha}{RR'} = \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{A}{\rho_{gu}}\right) - \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{C}{\rho_{gv}}\right) + \frac{\partial^2\alpha}{\partial u\,\partial v}. \tag{17}$$

C'est la formule de M. Liouville [1]. Dans le cas des coordonnées rectangulaires, elle est susceptible d'une transformation élégante.

---

[1] On la trouvera dans l'article que nous venons de citer.

Effectuons les dérivations et remarquons que l'on a

$$\frac{\partial A}{\partial v} = \frac{-AC}{\rho_{gu}}, \qquad \frac{\partial C}{\partial u} = \frac{AC}{\rho_{gv}};$$

en remplaçant les dérivées de A et de C par ces valeurs et divisant par AC, nous trouverons

$$\frac{1}{RR'} = \frac{\partial\left(\frac{1}{\rho_{gu}}\right)}{C\,\partial v} - \frac{\partial\left(\frac{1}{\rho_{gv}}\right)}{A\,\partial u} - \frac{1}{\rho_{gu}^2} - \frac{1}{\rho_{gv}^2},$$

ou encore, en désignant $A\,du$, $C\,dv$ respectivement par ∂s_u, ∂s_v,

$$(18) \qquad \frac{1}{RR'} = \frac{\partial\left(\frac{1}{\rho_{gu}}\right)}{\partial s_v} - \frac{\partial\left(\frac{1}{\rho_{gv}}\right)}{\partial s_u} - \frac{1}{\rho_{gu}^2} - \frac{1}{\rho_{gv}^2}.$$

La courbure totale de la surface se trouve ainsi exprimée d'une manière entièrement géométrique en fonction des courbures géodésiques de deux courbes coordonnées appartenant à un système orthogonal et de leurs dérivées par rapport à la normale.

M. Bertrand a montré que la formule de M. Liouville résulte immédiatement du théorème de Gauss.

Appliquons, en effet, la formule générale de M. Bonnet au quadrilatère curviligne formé par quatre lignes coordonnées (u), $(u+\Delta u)$, (v), $(v+\Delta v)$ (*fig.* 63). On aura d'abord

$$\int d\omega = 2\pi - (\pi - M') - (\pi - P') - (\pi - P) - (\pi - M),$$

M, M′, P, P′ désignant les angles intérieurs du quadrilatère MM′P′P. Si α désigne l'angle des lignes coordonnées, on aura évidemment

$$\int d\omega = \Delta_{uv}\alpha,$$

Δ_{uv} désignant, selon l'usage, la différence seconde de α lorsque u et v reçoivent respectivement les accroissements Δu et Δv.

Calculons maintenant l'intégrale $\int \frac{ds}{\rho_g}$ étendue à tout le contour. On aura

$$\int \frac{ds}{\rho_g} = \int_M^{M'} \frac{A\,du}{\rho_u} + \int_{M'}^{P'} \frac{C\,dv}{\rho_v} - \int_P^{P'} \frac{A\,du}{\rho_u} - \int_M^P \frac{C\,dv}{\rho_v},$$

c'est-à-dire

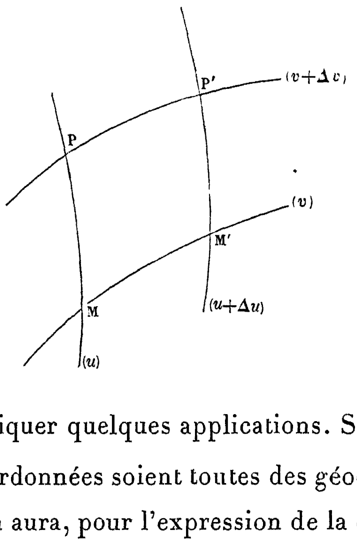
$$\int \frac{ds}{\rho_g} = -\Delta_v \int_M^{M'} \frac{A\,du}{\rho_u} + \Delta_u \int_M^{P} \frac{C\,dv}{\rho_v};$$

et, par conséquent, la formule de M. Bonnet nous donnera

$$\Delta_{uv}\alpha + \Delta_v \int_M^{M'} \frac{A\,du}{\rho_u} - \Delta_u \int_M^{P} \frac{C\,dv}{\rho_v} = \iint \frac{AC \sin\alpha\,du\,dv}{RR'},$$

l'intégrale double étant étendue à tout l'intérieur du quadrilatère. Si Δu et Δv deviennent infiniment petits, cette formule se réduit évidemment à celle de M. Liouville.

Fig. 63.



Nous allons indiquer quelques applications. Supposons d'abord que les lignes coordonnées soient toutes des géodésiques; $\frac{1}{\rho_{gu}}$, $\frac{1}{\rho_{gv}}$ seront nuls et l'on aura, pour l'expression de la courbure,

$$\text{(19)} \qquad \frac{AC \sin\alpha}{RR'} = \frac{\partial^2 \alpha}{\partial u\,\partial v}.$$

Si l'élément linéaire de la surface a été ramené à la forme

$$\text{(20)} \qquad ds^2 = du^2 + dv^2 + 2\,du\,dv \cos\alpha,$$

on aura

$$\text{(21)} \qquad \frac{1}{\rho_{gu}} = -\frac{\partial\alpha}{\partial u}, \qquad \frac{1}{\rho_{gv}} = \frac{\partial\alpha}{\partial v}$$

et, par conséquent,

$$\frac{\sin\alpha}{RR'} = -\frac{\partial^2\alpha}{\partial u\,\partial v}. \tag{22}$$

La forme (20) de l'élément linéaire, sur laquelle nous aurons l'occasion de revenir, offre quelque intérêt au point de vue géométrique; si l'on fait croître les variables u et v par degrés égaux, on obtient une division de la surface en losanges infiniment petits dont les côtés sont tous égaux, mais dont les angles sont variables. Considérons, avec M. Tchebychef (¹), une étoffe formée par deux systèmes de fils croisés à angle droit. Si l'on admet, avec l'éminent géomètre russe, que, dans toute déformation de l'étoffe, le point d'intersection de deux fils rectangulaires quelconques n'est pas changé, mais que l'angle seul de ces deux fils a pu varier, il est clair que l'élément linéaire de la surface formée par l'étoffe, primitivement défini par la formule

$$ds^2 = du^2 + dv^2,$$

prendra, par la déformation de l'étoffe, la forme

$$ds^2 = du^2 + dv^2 + 2\cos\alpha\,du\,dv,$$

où α sera une fonction quelconque de u et de v. Ainsi, d'après les idées que nous venons d'exposer, il faudrait, pour *habiller* une surface, résoudre le problème de Géométrie suivant :

Ramener, par un choix convenable des courbes coordonnées, l'élément linéaire de la surface proposée à la forme (20).

644. Revenons maintenant au théorème de Green et supposons que plusieurs courbes soient nécessaires pour limiter la portion de surface que l'on considère. Ce cas peut se présenter pour les surfaces les plus simples, comme le plan, la sphère, etc. Par exemple, on peut considérer (*fig.* 64) la portion d'une surface comprise entre la courbe (A) et les courbes (B) et (C). On suivra, dans ce cas, la méthode bien connue et l'on fera des sections qui nous ramèneront à l'hypothèse examinée en premier lieu. Ici, par

---

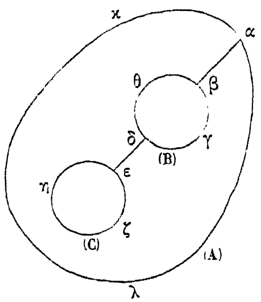
(¹) Tchebychef, *Sur la coupe des vêtements* (*Association française pour l'avancement des Sciences. Congrès de Paris*, p. 154; 1878).

exemple, nous joindrons par des traits $\alpha\beta$ et $\delta\varepsilon$ les courbes (A) et (B), (B) et (C), transformant ainsi la portion de surface considérée en une aire à connexion simple; puis nous suivrons le contour total $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\zeta\eta\varepsilon\delta\theta\beta\alpha\varkappa\lambda\alpha$, dans un sens ou dans l'autre, par exemple de manière à laisser toujours l'aire à notre gauche. Les chemins $\alpha\beta$, $\delta\varepsilon$ étant parcourus deux fois en sens contraire, les valeurs de l'intégrale

$$\int (\mathrm{M}\, du + \mathrm{N}\, dv)$$

relatives à ces portions du contour se détruiront si, conformément à l'hypothèse, les fonctions M et N sont uniformes; et il restera

Fig. 64.



seulement à étendre l'intégrale précédente aux trois courbes (A) (B), (C), parcourues chacune dans un sens tel que l'aire considérée soit toujours à la gauche du mobile. On aura donc, en répétant la démonstration que nous avons donnée plus haut,

$$\text{(23)} \qquad \sum \int (\mathrm{M}\, du + \mathrm{N}\, dv) = \int\int \left(\frac{\partial \mathrm{N}}{\partial u} - \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial v} \right) du\, dv,$$

le signe $\sum$ indiquant que l'intégrale du premier membre doit être étendue à toutes les courbes limites. Et, s'il existe, à l'intérieur de l'aire, des points pour lesquels les conditions de continuité ne soient pas satisfaites, on les isolera par une courbe que l'on joindra à celles qui limitent la région considérée.

Faisons l'application à la formule qui donne le rayon de cour-

bure géodésique; nous aurons

$$\sum\left(\int d\omega - \int \frac{ds}{\rho_g}\right) = \int\int \frac{d\sigma}{RR'} \tag{24}$$

les signes $\sum$ et $\int$ ayant la même signification que précédemment.

645. Dans le cas où la surface n'a pas de limites et où les conditions que nous avons énoncées sont remplies en chaque point de la surface, on aura

$$\int\int \frac{d\sigma}{RR'} = 0.$$

C'est ce qui a lieu, par exemple, pour le tore engendré par un cercle tournant autour d'un axe situé dans son plan mais ne le rencontrant pas. Si l'on rapporte cette surface au système formé par les méridiens et les parallèles, toute région infiniment petite de la surface sera traversée par le réseau de ces lignes comme une région du plan l'est par des droites parallèles à deux axes coordonnés. La courbure totale du tore sera donc nulle. On peut confirmer ce résultat en considérant successivement la portion convexe et la portion à courbures opposées de la surface. La portion convexe, par exemple, est limitée par les deux parallèles extrêmes de la surface. Pour chacun d'eux, on a évidemment

$$\omega = 0, \qquad -\int \frac{ds}{\rho_g} = 2\pi;$$

et, par conséquent, cette portion convexe a pour courbure 4π. Quant à la courbure de l'autre portion, elle est exprimée par des intégrales étendues aux mêmes contours, mais dont tous les éléments sont égaux et de signe contraire à ceux des intégrales précédentes. Elle est donc égale à -4π et la courbure totale est nulle.

Une sphère, un ellipsoïde ont évidemment une courbure totale égale à 4π. Les remarques précédentes nous conduisent par suite à cette conclusion qu'il est impossible de rapporter ces surfaces à des systèmes de coordonnées permettant de découper chaque région de la surface en mailles rectangulaires. Et en effet, quel que soit le système de coordonnées employé sur une sphère, il y aura toujours, dans l'application de la formule générale, des points ou des

lignes à isoler. Si l'on rapporte, par exemple, la sphère au système formé des méridiens et des parallèles, il faudra isoler les deux pôles; si l'on emploie les coordonnées elliptiques, il faudra isoler les quatre foyers, etc. Mais on peut appliquer la formule générale à la zone comprise entre deux parallèles de colatitudes θ_0 et θ_1. On aura, pour le premier parallèle,

$$\int d\omega = 0. \qquad -\int \frac{ds}{\rho_g} = 2\pi \cos\theta_0$$

et, pour le second,

$$\int d\omega = 0, \qquad -\int \frac{ds}{\rho_g} = -2\pi \cos\theta_1.$$

La formule générale deviendra

$$(25) \qquad 2\pi(\cos\theta_0 - \cos\theta_1) = \int\int \frac{d\sigma}{R^2},$$

ce qui est bien d'accord avec les résultats connus.

646. Nous donnerons, en terminant, une transformation de la formule générale qui permet d'éliminer la courbure géodésique. Nous avons vu (n° 631) qu'étant donné un arc de courbe MM′, si l'on porte sur les normales géodésiques des longueurs infiniment petites λ, la variation de cet arc a pour expression

$$\delta MM' = -\int_M^{M'} \frac{\lambda \, ds}{\rho_g}.$$

Si nous appliquons cette formule à un contour fermé et si nous supposons λ constant et égal à δn, elle nous donnera

$$(26) \qquad \frac{\delta s}{\delta n} = -\int \frac{ds}{\rho_g},$$

s désignant l'arc de la courbe et l'intégrale étant étendue à tout le contour. L'emploi de cette relation permet d'écrire la formule (24) sous la forme

$$(27) \qquad \sum\left(\int d\omega + \frac{\delta s}{\delta n}\right) = \int\int \frac{d\sigma}{RR'}.$$

Mais il importe de remarquer que, d'après la convention relative au signe de ρ_g, *la longueur constante* δn *doit être portée sur*

la portion des normales géodésiques du contour dirigée vers l'intérieur de l'aire, si le contour est supposé parcouru dans le sens direct. Pour définir d'une manière tout à fait précise le sens direct, il suffit d'imaginer un observateur placé sur la surface du même côté que la partie positive Oz de l'axe des z du trièdre (T). Le sens direct sera celui dans lequel cet observateur suivrait les diverses parties du contour en laissant toujours à sa gauche l'aire considérée.

Les intégrales $\int d\omega$ qui figurent dans la formule (27) sont étendues aux différentes courbes qui forment le contour. Soit (C) l'une de ces courbes: si elle n'a aucun point saillant, l'intégrale correspondante sera évidemment un multiple de 2π, puisque, après un tour complet, les lignes trigonométriques de ω reprennent la même valeur; si, au contraire, la courbe est brisée, on aura

$$\int d\omega = 2h\pi - \Sigma\theta,$$

h étant entier et $\Sigma\theta$ désignant la somme des angles θ dont la tangente tourne brusquement à chaque point saillant.

647. Les propriétés que nous venons de faire connaître successivement se ramènent en dernière analyse au beau théorème de Gauss sur la courbure du triangle géodésique. Il est naturel de se demander si ce théorème constitue une propriété caractéristique des lignes géodésiques. La réponse à cette question n'offre aucune difficulté.

Reprenons la formule (9) qui donne le rayon de courbure géodésique et qui conduit à l'équation

$$(28) \qquad \int d\omega - \int \frac{ds}{\rho_g} = \iint \frac{d\sigma}{RR'},$$

où les intégrales simples et double ont la signification plusieurs fois rappelée. Le théorème de Gauss et la formule plus générale de M. O. Bonnet reposent sur l'équation

$$(29) \qquad \int d\omega = \iint \frac{d\sigma}{RR'},$$

que l'on déduit de la précédente en supposant que le contour est

exclusivement formé de lignes géodésiques. La question que nous avons maintenant à nous proposer est donc la suivante : *Est-il nécessaire, pour que l'équation* (29) *ait lieu, que le contour soit formé de lignes géodésiques?* Or, si nous comparons cette équation (29) qui doit avoir lieu à la relation (28), qui est absolument générale, nous reconnaissons qu'elle équivaut à la suivante

$$\int \frac{ds}{\rho_g} = 0, \tag{30}$$

où l'intégrale est étendue à tout le contour. Cette condition est évidemment vérifiée si $\frac{1}{\rho_g}$ est nul en chaque point du contour, c'est-à-dire si le contour est formé de lignes géodésiques; mais elle aura lieu encore dans le cas bien plus général où toutes les courbes qui composent le contour satisferaient à l'équation du second ordre

$$\frac{ds}{\rho_g} = d\varphi(u, v), \tag{31}$$

φ étant une fonction arbitraire assujettie à l'unique condition d'avoir une valeur bien déterminée en chaque point de la surface. Nous sommes donc conduits à la conclusion suivante.

Le théorème de Gauss ne constitue nullement une propriété caractéristique des lignes géodésiques; il est encore vrai pour toutes les courbes qui satisfont à l'équation (31), c'est-à-dire pour lesquelles l'angle de contingence géodésique est la différentielle exacte d'une fonction de point.

C'est ainsi que, si l'on considère dans le plan les courbes qui satisfont à l'équation différentielle

$$\frac{ds}{\rho} = d\varphi(x, y),$$

x et y désignant les coordonnées cartésiennes, la somme des angles d'un triangle curviligne quelconque formé avec trois de ces courbes sera égale à deux droits.

Plus généralement, si l'on considérait une intégrale double quelconque

$$\iint \left(\frac{\partial M}{\partial v} - \frac{\partial N}{\partial u} \right) du\, dv$$

et les courbes satisfaisant à l'équation différentielle

$$d\varphi\left(u, v, \frac{du}{dv}, \frac{d^2u}{dv^2}, \dots\right) = \mathrm{M}\, du + \mathrm{N}\, dv,$$

l'intégrale double, étendue à tout polygone formé de ces courbes, s'exprimerait en fonction de la somme des accroissements que prend la fonction φ quand on passe d'un côté du polygone au suivant. Ces remarques n'ont peut-être pas d'importance pratique; mais elles font mieux comprendre les méthodes précédentes [1].

---

[1] DARBOUX, *Sur une série de lignes analogues aux lignes géodésiques* (*Annales de l'École Normale*, t. VII, 1re série; 1870).

CHAPITRE VII.

LES CERCLES GÉODÉSIQUES.

Nouvelle application du théorème de Green; généralisation du théorème des projections. — Expression analytique du rayon de courbure géodésique d'une courbe définie de la manière la plus générale par une équation quelconque en coordonnées curvilignes. — Étude des courbes (F) qui sont définies par cette propriété qu'en chacun de leurs points la courbure géodésique soit une fonction donnée à l'avance des coordonnées du point. — Équation du second ordre au moyen de laquelle on les détermine. — On peut, comme dans le cas des lignes géodésiques, ramener la détermination de ces courbes à l'intégration d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre. — Propositions et propriétés de maximum ou de minimum analogues à celles des lignes géodésiques. — Des cercles géodésiques, c'est-à-dire des courbes dont la courbure géodésique est constante. — Détermination des cercles géodésiques pour toutes les surfaces applicables sur des surfaces de révolution. — Propriétés relatives à la courbure géodésique dans les systèmes isothermes. — Systèmes orthogonaux composés de deux familles de cercles géodésiques. — Cas des surfaces à courbure constante.

---

648. Considérons un faisceau de courbes (φ) représenté par l'équation

$$\varphi(u, v) = \text{const.}$$

et une courbe fermée (A) (*fig.* 65). Calculons, en chaque point de (A), l'angle θ de la courbe (A) et de la courbe (φ) qui passe en ce point, supposées l'une et l'autre parcourues dans le sens indiqué par les flèches. Si l'élément linéaire est donné sous la forme de Gauss, on aura

$$\cos\theta = \frac{\mathrm{E}\,du\,\delta u + \mathrm{F}(du\,\delta v + dv\,\delta u) + \mathrm{G}\,dv\,\delta v}{ds\,\delta s}, \tag{1}$$

les symboles d et δ se rapportant respectivement à la courbe (A) et à la courbe (φ). On aura donc

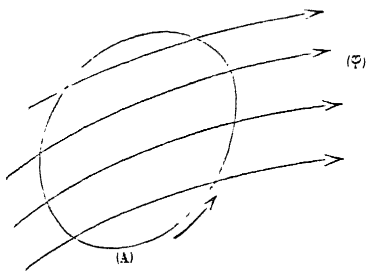
$$\frac{\partial\varphi}{\partial u}\delta u + \frac{\partial\varphi}{\partial v}\delta v = 0,$$

et, par conséquent,

$$(2)\qquad \frac{\delta u}{\delta s} = \frac{\dfrac{\partial \varphi}{\partial v}}{\mathrm{H}\sqrt{\Delta\varphi}}, \qquad \frac{\delta v}{\delta s} = -\frac{\dfrac{\partial \varphi}{\partial u}}{\mathrm{H}\sqrt{\Delta\varphi}},$$

H désignant le radical $\sqrt{\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2}$ et $\Delta\varphi$ étant le paramètre différentiel déjà rencontré dans la théorie des lignes géodésiques. Le radical aura son signe déterminé par la condition que les valeurs

Fig. 65.



de δu, δv correspondent au sens marqué par les flèches sur les courbes (φ). En portant les valeurs de δu, δv dans l'expression de $\cos\theta$, on trouvera

$$ds\cos\theta = \frac{\mathrm{E}\dfrac{\partial\varphi}{\partial v} - \mathrm{F}\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}}{\mathrm{H}\sqrt{\Delta\varphi}}\,du - \frac{\mathrm{G}\dfrac{\partial\varphi}{\partial u} - \mathrm{F}\dfrac{\partial\varphi}{\partial v}}{\mathrm{H}\sqrt{\Delta\varphi}}\,dv,$$

ou, plus simplement,

$$(3)\qquad ds\cos\theta = \mathrm{H}\,\frac{\partial\sqrt{\Delta\varphi}}{\partial\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial v}\right)}\,du - \mathrm{H}\,\frac{\partial\sqrt{\Delta\varphi}}{\partial\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}\right)}\,dv.$$

Par suite, l'intégrale

$$\int \cos\theta\, ds$$

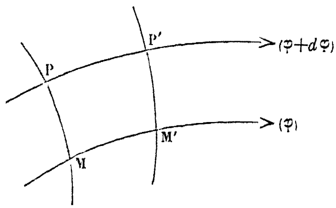
étendue au contour (A) sera égale, d'après le théorème de Green, à l'intégrale double

$$-\iint\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\mathrm{H}\,\frac{\partial\sqrt{\Delta\varphi}}{\partial\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\mathrm{H}\,\frac{\partial\sqrt{\Delta\varphi}}{\partial\dfrac{\partial\varphi}{\partial v}}\right)\right]du\,dv,$$

étendue à toute l'aire limitée par le contour.

D'autre part, d'après la démonstration même que nous avons donnée de ce théorème, la même intégrale curviligne sera égale à la somme des intégrales analogues relatives à chacun des contours infiniment petits dans lesquels on peut résoudre le contour (A). Prenons pour un de ces contours celui qui est formé (*fig.* 66)

Fig. 66.



par deux courbes infiniment voisines (φ), $(\varphi + d\varphi)$ et par deux de leurs trajectoires orthogonales infiniment voisines. Soit MM'P'P ce contour, qui sera parcouru dans le sens indiqué par les lettres. On a évidemment

$$\int_{M}^{M'} ds \cos\theta = MM', \qquad \int_{M'}^{P'} ds \cos\theta = o,$$

$$\int_{P'}^{P} ds \cos\theta = - PP', \qquad \int_{P}^{M} ds \cos\theta = o,$$

et, par conséquent, l'intégrale étendue à tout le contour aura pour valeur

$$MM' - PP'.$$

Si l'on emploie l'expression de la courbure géodésique donnée au n° 635, on trouvera

$$MM' - PP' = \frac{\overline{MM'}.\overline{MP}}{\rho_g}, \tag{4}$$

ρ_g désignant le rayon de courbure de la courbe (φ) au point M, rayon qui sera considéré comme positif seulement s'il est porté dans le sens MP. D'ailleurs, comme $\overline{MM'}.\overline{MP}$ représente l'aire $d\sigma$ comprise à l'intérieur du contour MM'P'P, on peut écrire la relation

$$\int_{(A)} ds \cos\theta = \iint \frac{d\sigma}{\rho_g} \tag{5}$$

qui donne une nouvelle expression de l'intégrale curviligne étendue au contour (A).

Si nous l'égalons à l'expression déjà trouvée, nous obtiendrons la relation

$$\iint \frac{d\sigma}{\rho_g} = -\iint \left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\mathrm{H} \frac{\partial \sqrt{\Delta\varphi}}{\partial \frac{\partial \varphi}{\partial u}} \right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\mathrm{H} \frac{\partial \sqrt{\Delta\varphi}}{\partial \frac{\partial \varphi}{\partial v}} \right) \right] du\, dv,$$

où les deux intégrales doubles sont étendues l'une et l'autre à la même aire. Comme cette aire est d'ailleurs limitée par un contour quelconque, il faut nécessairement que les éléments des deux intégrales soient égaux. On aura donc, en remplaçant $d\sigma$ par $\mathrm{H}\, du\, dv$, l'équation

$$(6) \qquad \frac{\mathrm{H}}{\rho_g} = -\frac{\partial}{\partial u}\left(\mathrm{H} \frac{\partial \sqrt{\Delta\varphi}}{\partial \frac{\partial \varphi}{\partial u}} \right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\mathrm{H} \frac{\partial \sqrt{\Delta\varphi}}{\partial \frac{\partial \varphi}{\partial v}} \right),$$

qui fera connaître la courbure géodésique des courbes (φ). Cette formule élégante est due à M. O. Bonnet, qui l'a démontrée par d'autres considérations [1].

La formule (5), qui résulte de la méthode précédente, peut être considérée comme une généralisation du théorème des projections. Supposons, en effet, que les courbes (φ) deviennent des droites parallèles dans le plan. On aura, pour tous les points de l'aire, $\rho_g = \infty$ et, par suite,

$$\int_{(A)} ds \cos\theta = 0,$$

ce qui constitue l'expression analytique du théorème des projections.

649. On peut faire reposer sur l'équation (6) la théorie des courbes dont la courbure géodésique est une fonction quelconque donnée à l'avance, $\mathrm{F}(u, v)$, des coordonnées u et v du point de la courbe. Ces courbes sont définies par l'équation différentielle

---

[1] O. BONNET, *Mémoire sur l'emploi d'un nouveau système de variables dans l'étude des propriétés des surfaces courbes* (*Journal de Liouville*, 2e série,

du second ordre

$$F(u, v)\, ds = d\omega + r\, du + r_1\, dv, \tag{7}$$

que l'on déduit immédiatement de l'expression connue du rayon de courbure géodésique. Elles comprennent comme cas particulier les courbes dont la courbure géodésique est constante, et elles donnent la solution d'un intéressant problème de Calcul des variations. Il nous suffira, pour le montrer, de suivre la méthode que nous avons déjà employée (Livre V, Chap. IV) dans l'étude des lignes géodésiques. Pour abréger, nous désignerons sous le nom de *courbes* (F) toutes celles que nous venons de définir et qui satisfont à l'équation précédente ou, si l'on veut, à la suivante

$$\frac{1}{\rho_g} = F(u, v). \tag{8}$$

Soit

$$\varphi(u, v) = \text{const.}$$

l'équation d'une famille quelconque de courbes (F). En adoptant l'expression (6) de la courbure géodésique, nous voyons que φ devra satisfaire identiquement à l'équation aux dérivées partielles suivante

$$H\, F(u, v) + \frac{\partial}{\partial u}\left(H \frac{\partial \sqrt{\Delta\varphi}}{\partial \dfrac{\partial\varphi}{\partial u}}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(H \frac{\partial \sqrt{\Delta\varphi}}{\partial \dfrac{\partial\varphi}{\partial v}}\right) = 0. \tag{9}$$

Or on peut toujours, et d'une infinité de manières, mettre le produit HF sous la forme [1]

$$H\, F(u, v) = \frac{\partial N}{\partial u} - \frac{\partial M}{\partial v}. \tag{10}$$

Si l'on substitue cette expression dans l'équation (9) et si l'on désigne, pour abréger, par p' et q' les dérivées de φ, on mettra l'équation à intégrer sous la forme

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(H \frac{\partial \sqrt{\Delta\varphi}}{\partial p'} + N\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(H \frac{\partial \sqrt{\Delta\varphi}}{\partial q'} - M\right) = 0. \tag{11}$$

---

(1) Par exemple, on donnera M arbitrairement et l'on déterminera N par une quadrature.

En introduisant une fonction auxiliaire θ dont nous désignerons les dérivées par p et q, on peut évidemment remplacer l'équation précédente par le système suivant :

$$(12) \qquad \mathrm{H}\frac{\partial\sqrt{\Delta\varphi}}{\partial p'} = -\mathrm{N}-q, \qquad \mathrm{H}\frac{\partial\sqrt{\Delta\varphi}}{\partial q'} = \mathrm{M}+p.$$

Or ces deux équations ne contiennent φ que dans le rapport $\frac{p'}{q'}$. On pourra donc éliminer ce rapport et l'on sera ainsi conduit à l'équation du premier ordre pour θ

$$(13) \qquad \frac{\mathrm{E}(\mathrm{N}+q)^2 - 2\mathrm{F}(\mathrm{N}+q)(\mathrm{M}+p) + \mathrm{G}(\mathrm{M}+p)^2}{\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2} = 1,$$

qui se réduit à celle que nous avons donnée pour les lignes géodésiques quand on y fait $\mathrm{M} = \mathrm{N} = 0$.

Il suffit de se rappeler les résultats établis au Livre V (Chap. V) et l'on reconnaîtra immédiatement que l'équation précédente exprime la condition nécessaire et suffisante pour que la différence

$$ds^2 - (d\theta + \mathrm{M}\,du + \mathrm{N}\,dv)^2,$$

considérée comme une fonction homogène de du et de dv, soit un carré parfait

$$(\alpha\,du + \beta\,dv)^2;$$

il résulte d'ailleurs des formules (12) que ce carré aura pour expression

$$\frac{d\varphi^2}{\Delta\varphi}.$$

Nous sommes donc conduits à la proposition suivante :

Pour obtenir toutes les familles de courbes (F), *il suffira de déterminer une solution quelconque de l'équation aux dérivées partielles* (13). *Cette solution* θ *étant trouvée, le carré de l'élément linéaire pourra se mettre sous la forme*

$$(14) \qquad ds^2 = (d\theta + \mathrm{M}\,du + \mathrm{N}\,dv)^2 + (\alpha\,du + \beta\,dv)^2,$$

et l'équation différentielle

$$\alpha\,du + \beta\,dv = 0$$

définira l'une des familles cherchées.

En d'autres termes, le problème proposé est équivalent au suivant :

Mettre l'élément linéaire de la surface sous la forme

$$ds^2 = (d\theta + \mathrm{M}\,du + \mathrm{N}\,dv)^2 + \sigma^2\,d\theta_1^2. \tag{15}$$

Les courbes $\theta_1 = \text{const.}$ seront celles qu'il s'agissait de déterminer.

650. Cette proposition est évidemment analogue à celle que nous avons donnée au n° 531, relativement aux lignes géodésiques. Elle donne lieu aussi à un grand nombre de conséquences, toutes semblables à celles que nous avons développées plus haut (Livre V, Chap. V). Nous allons les indiquer rapidement, sans apporter à cette étude autant de soin et de rigueur que dans le cas plus important des lignes géodésiques.

On peut démontrer d'abord, par l'application pure et simple de la méthode exposée au n° 532, que, si l'on a obtenu une solution θ de l'équation (13) contenant une constante arbitraire a, on pourra prendre, dans la formule (15),

$$\theta_1 = \frac{\partial\theta}{\partial a}$$

et, par conséquent, l'équation générale des courbes (F) sera

$$\frac{\partial\theta}{\partial a} = a'. \tag{16}$$

Nous reviendrons plus loin (n° 651) sur ce sujet; et nous allons maintenant montrer comment on généralise les propriétés de minimum relatives aux lignes géodésiques.

Soit (F′) *l'une des courbes* (F) *et soient* A *et* B *deux de ses points, suffisamment voisins. Si l'on considère toutes les courbes* (K) *joignant ces deux points, pour lesquelles l'intégrale*

$$\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} (\mathrm{M}\,du + \mathrm{N}\,dv)$$

a même valeur que pour la courbe (F′), *celle de ces courbes dont l'arc compris entre* A *et* B *sera le plus petit possible sera précisément la courbe* (F′).

Imaginons, en effet, que l'on considère la famille formée par toutes les courbes (F) qui passent en A et la fonction correspondante θ dont les dérivées sont liées à celles de φ par les équations (12). On pourra mettre l'élément linéaire de la surface sous la forme

$$ds^2 = (d\theta + \mathrm{M}\, du + \mathrm{N}\, dv)^2 + \sigma^2\, d\varphi^2. \tag{17}$$

Par des raisonnements analogues à ceux du n° 518, on montrera que l'on peut constituer autour de A une région telle que, par le point A et par un point B de cette région, il passe une seule courbe (F) située tout entière dans la région. On obtiendra cette région, par exemple, en portant sur toutes les courbes (F) une longueur égale ou inférieure à une limite l. Ce point étant admis, on peut répéter rapidement la démonstration du n° 521.

Pour une courbe quelconque (K) joignant A à un point B de la région, l'arc s est donné par la formule

$$s = \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \sqrt{(d\theta + \mathrm{M}\, du + \mathrm{N}\, dv)^2 + \sigma^2\, d\varphi^2}.$$

On a donc, si la courbe (K) est distincte de (F′),

$$s > \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} (d\theta + \mathrm{M}\, du + \mathrm{N}\, dv)$$

ou

$$s > \theta_{\mathrm{B}} - \theta_{\mathrm{A}} + \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} (\mathrm{M}\, du + \mathrm{N}\, dv); \tag{18}$$

et, si la courbe (K) se confond avec (F′),

$$s' = \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} (d\theta + \mathrm{M}\, du + \mathrm{N}\, dv) = \theta_{\mathrm{B}} - \theta_{\mathrm{A}} + \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} (\mathrm{M}\, du + \mathrm{N}\, dv). \tag{19}$$

Mais, par hypothèse, nous ne considérons que les courbes (K) pour lesquelles l'intégrale

$$\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} (\mathrm{M}\, du + \mathrm{N}\, dv) \tag{20}$$

a la même valeur que pour la courbe (F′). La comparaison de

l'inégalité (18) et de l'équation (19) nous donne donc

$$s > s',$$

et la proposition que nous avions en vue est ainsi démontrée.

On peut déduire des formules précédentes une autre conséquence. N'assujettissons plus l'intégrale (20) à avoir une valeur déterminée, mais considérons, parmi les courbes (K) réunissant les points A et B, celles qui ont la même longueur que (F'). On aura alors

$$s = s',$$

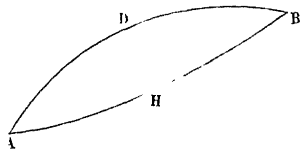
et la comparaison des formules (18) et (19) montre alors que *l'intégrale*

$$\int_A^B (M\,du + N\,dv)$$

sera plus grande pour la courbe (F') *que pour toute autre courbe de même longueur réunissant les points* A *et* B.

On peut donner une forme différente à ces résultats. Menons par les points A et B une courbe fixe quelconque ADB (*fig.* 67).

Fig. 67.



L'intégrale (20), relative à toute autre courbe AHB unissant les mêmes points, ne diffère que par une constante de celle qui est relative au contour entier AHBDA. Or l'intégrale curviligne relative à ce contour fermé peut être remplacée par l'intégrale double

$$\Omega = \iint \left(\frac{\partial N}{\partial u} - \frac{\partial M}{\partial v} \right) du\,dv,$$

étendue à toute l'aire que limite le contour. On peut donc transformer comme il suit les propositions précédentes :

Soient A *et* B *deux points suffisamment voisins, pris sur une courbe* (F), *et* ADB *une courbe fixe, mais quelconque, unissant les deux points. La courbe* (F) *est la plus courte parmi toutes*

celles qui unissent les mêmes points et donnent à l'intégrale Ω *la valeur qu'elle prend dans le cas de la courbe* (F). On peut dire aussi que, *parmi toutes les courbes de même longueur unissant les deux points, la courbe* (F) *est celle pour laquelle l'intégrale* Ω *est maximum.*

651. Nous sommes maintenant en mesure de résoudre les deux questions suivantes :

Étant donnée une courbe quelconque ADB, *trouver, parmi les courbes* AHB *joignant ses extrémités et pour lesquelles une certaine intégrale double*

$$\Omega = \int\int\left(\frac{\partial N}{\partial u} - \frac{\partial M}{\partial v}\right) du\, dv = \int\int H\, F(u, v)\, du\, dv, \tag{21}$$

étendue à l'aire ADBHA, *a une valeur donnée, celle qui est la plus courte;*

ou encore

Trouver parmi toutes les courbes de même longueur unissant les points A *et* B *celle pour laquelle l'intégrale double précédente est maximum.*

On cherchera toutes les courbes dont le rayon de courbure géodésique est déterminé par la formule

$$\frac{1}{\rho_g} = k\frac{\dfrac{\partial N}{\partial u} - \dfrac{\partial M}{\partial v}}{H} = k\, F(u, v), \tag{22}$$

où k désigne une constante arbitraire. On construira celles de ces courbes qui passent par les points A et B; et l'on déterminera la constante k par la condition que l'intégrale double Ω dans la première question, ou la longueur de l'arc dans la seconde, ait la valeur donnée *a priori*. Les courbes obtenues donneront la solution cherchée. Cela résulte presque immédiatement des propositions établies. La règle précédente est d'ailleurs celle à laquelle conduit l'application régulière des méthodes du Calcul des variations. Le lecteur rétablira aisément le calcul que nous omettons ici. Nous allons indiquer seulement comment on pourra déterminer les courbes et exprimer les conditions indiquées.

On écrira d'abord l'équation aux dérivées partielles

$$(23)\qquad G(p+kM)^2 - 2F(p+kM)(q+kN) + E(q+kN)^2 = EG - F^2,$$

que l'on obtient en remplaçant M, N par kM, kN dans l'équation (13).

Supposons que l'on en connaisse une solution θ contenant la constante arbitraire a. On pourra mettre l'élément linéaire de la surface sous la forme

$$(24)\qquad ds^2 = [d\theta + k(M\,du + N\,dv)]^2 + \sigma^2\,d\theta_1^2.$$

Suivant la méthode du n° 532, différentions en faisant varier seulement les constantes a et k. Nous aurons

$$\begin{aligned}[d\theta + k(M\,du + N\,dv)]&\left[d\frac{\partial\theta}{\partial a}\,\delta a + \left(d\frac{\partial\theta}{\partial k} + M\,du + N\,dv\right)\delta k\right]\\ &+ \sigma\,d\theta_1\left[\left(\frac{\partial\sigma}{\partial a}\,d\theta_1 + \sigma\,d\frac{\partial\theta_1}{\partial a}\right)\delta a + \left(\frac{\partial\sigma}{\partial k}\,d\theta_1 + \sigma\,d\frac{\partial\theta_1}{\partial k}\right)\delta k\right] = 0.\end{aligned}$$

La différentielle $d\theta_1$, considérée comme fonction de du et de dv, doit diviser la première ligne. Comme elle ne peut diviser le premier facteur, elle doit nécessairement diviser le second, *et cela, quels que soient* δa, δk. En répétant le raisonnement du numéro cité, on pourra prendre

$$\theta_1 = \frac{\partial\theta}{\partial a},$$

et il restera l'équation nouvelle

$$(25)\qquad d\frac{\partial\theta}{\partial k} + M\,du + N\,dv = \lambda\,d\frac{\partial\theta}{\partial a},$$

où λ désigne un facteur de proportionnalité. On en déduit la conséquence suivante.

Si l'on se déplace sur une des courbes intégrales ($\theta_1 =$ const.) entre deux points A et B, $\dfrac{\partial\theta}{\partial a}$ demeurera constante. On aura donc

$$d\frac{\partial\theta}{\partial k} + M\,du + N\,dv = 0$$

et, par suite,

$$\int_A^B (M\,du + N\,dv) = \left(\frac{\partial\theta}{\partial k}\right)_A - \left(\frac{\partial\theta}{\partial k}\right)_B.$$

L'intégrale simple qui figure dans le premier membre est égale

à $\Omega - l$, l étant une constante connue. On a donc

$$(26) \qquad \Omega = l + \left(\frac{\partial\theta}{\partial k}\right)_A - \left(\frac{\partial\theta}{\partial k}\right)_B.$$

On aura de même, s désignant l'arc AB,

$$s = \int_A^B [d\theta + k(M\,du + N\,dv)] = \int_A^B \left(d\theta - k\,d\frac{\partial\theta}{\partial k}\right)$$

ou encore

$$(27) \qquad s = \left(\theta - k\frac{\partial\theta}{\partial k}\right)_A^B.$$

Ces expressions de s et de Ω permettront d'écrire simplement les équations de condition qui se présentent dans les deux problèmes proposés plus haut.

652. L'application la plus intéressante des propositions générales précédentes se rapporte au cas où l'intégrale double Ω est celle qui donne l'aire d'une portion de la surface. On doit alors déterminer M et N par l'équation

$$(28) \qquad H = \sqrt{EG - F^2} = \frac{\partial N}{\partial u} - \frac{\partial M}{\partial v},$$

et la formule (22) nous donne

$$(29) \qquad \frac{1}{\rho_g} = k.$$

Les courbes correspondantes ont leur courbure géodésique constante. Nous les nommerons, pour abréger, des *cercles géodésiques* (¹). Des résultats qui précèdent nous déduisons les corollaires suivants :

Parmi toutes les courbes de même longueur unissant deux

(¹) Quelques auteurs, au contraire, appellent *cercles géodésiques* les courbes que l'on obtient en portant des longueurs constantes sur toutes les géodésiques passant par un point. Comme le cercle, ces courbes sont toujours fermées et elles coupent à angle droit tous leurs rayons géodésiques; mais elles n'ont pas, en général, leur courbure géodésique constante. Les lignes à courbure géodésique constante, auxquelles nous réservons ici le nom de *cercles géodésiques,* ne sont fermées que sur les surfaces à courbure constante. Le lecteur l'établira en cherchant l'équation approchée d'un cercle géodésique de courbure infiniment petite.

points A *et* B, *celle qui, jointe à une courbe fixe* ADB (*fig.* 67), *limite la plus grande étendue de la surface est un cercle géodésique.*

Parmi toutes les courbes unissant les mêmes points et limitant une étendue donnée de la surface, la plus courte est un cercle géodésique.

653. Pour donner au moins une application de la théorie générale qui précède, nous allons montrer que l'on peut déterminer les cercles géodésiques de toutes les surfaces qui sont applicables sur les surfaces de révolution ([1]).

On a alors, pour l'élément linéaire, l'expression

$$ds^2 = du^2 + \varphi^2(u)\, dv^2,$$

et l'équation (10) devient

$$\mathrm{H} = \varphi(u) = \frac{\partial \mathrm{N}}{\partial u} - \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial v}.$$

On peut donc prendre

$$\mathrm{M} = 0, \qquad \mathrm{N} = \int \varphi(u)\, du = \psi(u).$$

L'équation à intégrer (23) prend la forme

$$p^2 + \frac{[q + k\psi(u)]^2}{\varphi^2(u)} = 1. \tag{30}$$

Posons ici encore, comme au n° 579,

$$\theta = av + \mathrm{F}(u);$$

il viendra

$$\mathrm{F}'(u) = \sqrt{1 - \left[\frac{a + k\psi(u)}{\varphi(u)}\right]^2},$$

ce qui donnera

$$\theta = av + \int \sqrt{1 - \left[\frac{a + k\psi(u)}{\varphi(u)}\right]^2}\, du. \tag{31}$$

([1]) *Voir*, à ce sujet, les deux articles suivants :

MINDING, *Zur Theorie der Curven kürzesten Umrings, bei gegebenem Flächeninhalt, auf krummen Flächen* (*Journal de Crelle*, t. LXXXVI, p. 279; 1878).

DARBOUX, *Sur les cercles géodésiques* (*Comptes rendus*, t. XCVI, p. 54; 1883).

Si l'on différentie par rapport à a, on aura l'équation générale des cercles géodésiques

$$v - \int \frac{a + k\psi(u)}{\varphi(u)\sqrt{\varphi^2(u) - [a + k\psi(u)]^2}}\, du = a'. \tag{32}$$

Dans le cas des surfaces à courbure constante et égale à l'unité, on peut prendre

$$\varphi(u) = \sin u,$$

et l'on trouve, en effectuant la quadrature,

$$\sqrt{1 + k^2 - a^2}\,\sin(v - v_0)\sin u + a\cos u = k.$$

C'est l'équation que l'on obtient immédiatement si l'on suppose que la surface soit une sphère de rayon 1.

654. Nous terminerons ce Chapitre en indiquant quelques propositions très simples relatives aux cercles géodésiques et aux systèmes isothermes.

Considérons d'une manière générale une surface rapportée à un système de coordonnées orthogonales, et soit

$$ds^2 = A^2\, du^2 + C^2\, dv^2$$

la formule qui donne l'élément linéaire. Si l'on désigne respectivement par ρ_u et ρ_v les rayons de courbure géodésique des arcs $A\,du$ et $C\,dv$, on aura

$$\frac{1}{\rho_v} = \frac{1}{AC}\frac{\partial C}{\partial u}, \qquad \frac{1}{\rho_u} = -\frac{1}{AC}\frac{\partial A}{\partial v}. \tag{33}$$

Supposons d'abord que le système soit isotherme. On pourra prendre

$$A = C = \lambda,$$

et il viendra

$$\frac{1}{\rho_v} = \frac{1}{\lambda^2}\frac{\partial \lambda}{\partial u}, \qquad \frac{1}{\rho_u} = -\frac{1}{\lambda^2}\frac{\partial \lambda}{\partial v}; \tag{34}$$

d'où l'on déduit

$$\frac{\partial\left(\frac{1}{\rho_u}\right)}{\partial u} + \frac{\partial\left(\frac{1}{\rho_v}\right)}{\partial v} = 0. \tag{35}$$

En divisant par λ et posant

$$ds_u = \lambda\, du, \qquad ds_v = \lambda\, dv,$$

on peut donner à cette équation la forme suivante

$$\frac{\partial\left(\frac{1}{\rho_u}\right)}{\partial s_u} + \frac{\partial\left(\frac{1}{\rho_v}\right)}{\partial s_v} = 0, \tag{36}$$

qui est entièrement géométrique et qui exprime que les *dérivées des courbures géodésiques des deux courbes coordonnées suivant la tangente sont égales au signe près.*

Cette propriété, il est aisé de le reconnaître, caractérise les systèmes orthogonaux et isothermes; car, si l'on remplace dans l'équation précédente ds_u par $A\,du$, ds_v par $C\,dv$, ρ_u et ρ_v par leurs expressions (33), il vient

$$\frac{\partial^2}{\partial u\,\partial v}\log\frac{A}{C} = 0;$$

d'où l'on déduit

$$\frac{A}{C} = \frac{f(u)}{f_1(v)},$$

équation caractéristique des systèmes isothermes.

L'équation (36), rapprochée de la remarque précédente, donne naissance aux deux conséquences suivantes :

1° *Si une famille de courbes isothermes est composée de cercles géodésiques, il en est de même de la famille isotherme formée par les trajectoires orthogonales.*

Supposons, en effet, que cette famille soit formée par les courbes de paramètre v. Alors ρ_u sera une fonction de v; on aura

$$\frac{\partial\left(\frac{1}{\rho_u}\right)}{\partial u} = 0,$$

et la formule (35) nous donnera

$$\frac{\partial\left(\frac{1}{\rho_v}\right)}{\partial v} = 0.$$

Donc ρ_v sera une fonction de u, ce qui démontre la proposition.

2° *Si des cercles géodésiques forment deux familles de courbes se coupant à angle droit, ces deux familles sont isothermes.*

En effet, l'équation (36) est alors vérifiée, et nous venons de démontrer qu'elle caractérise les systèmes isothermes.

Il nous reste à indiquer quelle est la forme de l'élément linéaire pour de tels systèmes. Posons

$$\frac{1}{\rho_v} = -F'(u) = -U', \qquad \frac{1}{\rho_u} = \Phi'(v) = V'.$$

Les équations (33) nous donneront

$$\frac{\partial\left(\frac{1}{\lambda}\right)}{\partial u} = U', \qquad \frac{\partial\left(\frac{1}{\lambda}\right)}{\partial v} = V';$$

d'où, en intégrant, on déduit

$$\lambda = \frac{1}{U+V}. \tag{37}$$

Ainsi l'élément linéaire est exprimé par la relation

$$ds^2 = \frac{du^2 + dv^2}{(U+V)^2}, \tag{38}$$

dont la forme seule suffit à établir qu'il n'existe pas, en général, sur une surface donnée *a priori*, deux familles orthogonales composées de cercles géodésiques.

655. Nous avons déjà déterminé (n° 638) les surfaces dont toutes les lignes de courbure sont des cercles géodésiques. Nous signalerons ici encore une question non résolue, analogue à celle que nous avons proposée relativement à l'élément linéaire de M. Liouville : *Rechercher toutes les surfaces dont l'élément linéaire peut être ramené de diverses manières à la forme* (38), *c'est-à-dire qui admettent plusieurs couples de familles orthogonales composées de cercles géodésiques.*

Au nombre de ces surfaces on doit trouver évidemment toutes celles dont la courbure totale est constante. Nous nous contenterons de rappeler ici une proposition qui a été démontrée par MM. O. Bonnet et Catalan :

Étant données deux droites D *et* Δ, *polaires l'une de l'autre par rapport à la sphère, tous les cercles dont les plans passent par* Δ *coupent à angle droit les cercles dont les plans passent*

par D. *Les deux familles de cercles orthogonaux ainsi déterminées sont les plus générales que l'on puisse tracer sur la sphère.*

On démontre immédiatement cette proposition au moyen du lemme suivant :

Quand deux cercles d'une sphère sont orthogonaux, le plan de chacun d'eux contient le pôle du plan de l'autre par rapport à la sphère.

Ces systèmes orthogonaux composés de cercles ont déjà été employés aux n^{os} 206 et 207. On pourrait les retrouver ici en exprimant que l'élément linéaire (38) convient à une surface dont la courbure est constante. On est ainsi conduit à une équation qui contient, en même temps que les fonctions U et V, leurs dérivées des deux premiers ordres et qui permettra de déterminer les expressions les plus générales de ces fonctions U et V.

CHAPITRE VIII.

LES TRIANGLES GÉODÉSIQUES ET LE THÉORÈME DE GAUSS.

Du système de coordonnées polaires dans une surface quelconque. — Développement suivant les puissances de u de la courbure totale et de la quantité λ qui figure dans l'expression

$$ds^2 = du^2 + \lambda^2 dv^2$$

de l'élément linéaire. — Distance géodésique de deux points quelconques. — Son carré est développable en série. — Calcul des premiers termes de cette série. — Triangles géodésiques infiniment petits. — Théorème de Gauss. — Expression de la surface du triangle. — Application des résultats précédents à la détermination de quelques infiniment petits relatifs à une courbe quelconque tracée sur la surface. — Expressions de l'arc approchées jusqu'aux termes du cinquième ordre. — Étude d'une question posée par M. Christoffel : recherche des surfaces pour lesquelles il y a, entre les six éléments d'un triangle géodésique, une ou plusieurs relations indépendantes des coordonnées des six sommets. — Travaux de MM. Weingarten et von Mangoldt. — Les surfaces à courbure constante sont les seules pour lesquelles il y ait plus d'une relation entre les six éléments; et le nombre de ces relations est égal à trois. — Les surfaces applicables sur des surfaces de révolution sont les seules pour lesquelles il y ait une relation, et une seule, entre les six éléments. — Démonstration de ce dernier résultat par la considération des triangles géodésiques infiniment aplatis.

---

656. Considérons toutes les géodésiques passant par un point C d'une surface donnée (*fig.* 68). Nous avons vu [II, p. 407] que, dans une région suffisamment petite s'étendant autour du point C, chaque point A de la surface est bien déterminé par sa distance géodésique $u = AC$ au point C et par l'angle v que fait en C la géodésique CA avec une courbe fixe quelconque CH, choisie pour marquer l'origine des angles.

On sait qu'avec ce système de coordonnées l'élément linéaire est défini par la formule

$$ds^2 = du^2 + \lambda^2 dv^2, \tag{1}$$

et que la courbure totale de la surface a pour expression

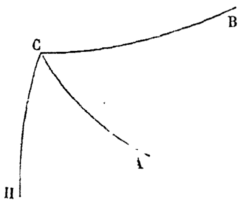
$$\frac{1}{RR'} = -\frac{1}{\lambda}\frac{\partial^2 \lambda}{\partial u^2}. \tag{2}$$

Si l'on porte des longueurs égales sur toutes les géodésiques passant en C, on obtient une courbe fermée entourant le point C. L'élément de l'arc de cette courbe a pour valeur

$$ds = \lambda\, dv.$$

On voit donc que λ doit devenir nul avec u, et, de plus, en assimilant la surface à un plan dans la région voisine du point C, on reconnaît que le rapport de λ à u doit tendre vers l'unité

Fig. 68.



lorsque u diminue indéfiniment. Mais, pour établir ce point en toute rigueur et surtout pour obtenir des résultats plus complets sur la forme de λ, nous devons donner quelques développements qui sont d'ailleurs nécessaires pour la suite.

Soit

$$(3) \qquad ds^2 = \mathrm{E}\, dp^2 + 2\mathrm{F}\, dp\, dq + \mathrm{G}\, dq^2$$

l'expression de l'élément linéaire rapporté à un système de coordonnées quelconques p et q. Si p_1, q_1 désignent les coordonnées du point C, nous admettrons que E, F, G sont développables suivant les puissances de $p - p_1$, $q - q_1$. Ces conditions sont évidemment remplies, avec une infinité de systèmes de coordonnées, pour toute région de la surface ne présentant pas de singularité. Pour plus de simplicité, substituons aux coordonnées p, q les différences $p - p_1$, $q - q_1$. De cette manière, *les deux coordonnées du point* C *deviendront nulles et* E, F, G *deviendront développables en séries ordonnées suivant les puissances de p et de q; ces séries seront convergentes au moins tant que les modules de p et de q n'atteindront pas certaines limites déterminées.*

Ces hypothèses étant admises, nous avons vu au n° 518

[II, p. 408] que, si l'on trace une géodésique passant par le point (p_0, q_0), les coordonnées p, q d'un point quelconque de cette ligne sont définies par les équations

$$(4)\qquad \begin{cases} p - p_0 = p' + \alpha p'^2 + 2\alpha' p' q' + \alpha'' q'^2 + \ldots, \\ q - q_0 = q' + \beta p'^2 + 2\beta' p' q' + \beta'' q'^2 + \ldots, \end{cases}$$

où les coefficients α, α', α'', ..., β, β', β'', ... sont des séries, ordonnées suivant les puissances de p_0, q_0 et convergentes tant que les modules de ces variables sont inférieurs à des quantités déterminées. Quant aux quantités p', q', elles ont pour expressions

$$(5)\qquad p' = \theta\left(\frac{dp}{d\theta}\right)_0, \qquad q' = \theta\left(\frac{dq}{d\theta}\right)_0,$$

θ désignant l'arc de la géodésique compté à partir du point initial (p_0, q_0) et $\left(\frac{dp}{d\theta}\right)_0$, $\left(\frac{dq}{d\theta}\right)_0$ indiquant les valeurs initiales des dérivées de p et de q considérées comme fonctions de cet arc. Nous avons remarqué [II, p. 409] que l'on a

$$(6)\qquad E^0 p'^2 + 2F^0 p' q' + G^0 q'^2 = \theta^2,$$

E^0, F^0, G^0 étant les valeurs de E, F, G pour le point initial (p_0, q_0). D'après cela, les valeurs de p, q données par les équations (4) doivent être regardées comme des séries ordonnées suivant les puissances des quatre variables p_0, q_0, p', q', séries qui sont convergentes quand les modules de ces variables sont inférieurs à certaines limites déterminées [1].

Ces résultats étant admis, supposons d'abord que le point (p_0, q_0) coïncide avec le point C; c'est-à-dire faisons

$$p_0 = q_0 = 0.$$

Alors la géodésique deviendra l'une de celles qui passent au point C, CB par exemple; l'arc θ deviendra la variable que nous

---

[1] Cette proposition résulte de la théorie des équations aux dérivées partielles. Car les valeurs de p et de q données par les formules (4) peuvent être considérées comme des fonctions des trois variables p_0, q_0, s définies par la double condition de satisfaire aux équations (16) du tome II, p. 408, et de se réduire respectivement à p_0 et à q_0 pour $s = 0$. Il résulte alors de la théorie générale que les séries (4) seront convergentes pour des valeurs de p_0, q_0 et de s, c'est-à-dire de p' et de q', dont les modules n'atteindront pas certaines quantités déterminées.

avons appelée u; et, si l'on suppose que CH soit la courbe de paramètre q passant en C, l'angle φ sera défini par les formules déjà employées [I, p. 154]

$$(7)\quad \begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{E_0 p' + F_0 q'}{\sqrt{E_0}\sqrt{E_0 p'^2 + 2F_0 p'q' + G_0 q'^2}}, \\[2ex] \sin\varphi = \dfrac{\sqrt{E_0 G_0 - F_0^2}\, q'}{\sqrt{E_0}\sqrt{E_0 p'^2 + 2F_0 p'q' + G_0 q'^2}}, \end{cases}$$

où E_0, F_0, G_0 désignent maintenant les valeurs que prennent E, F, G au point C. Comme on a aussi

$$E_0 p'^2 + 2F_0 p'q' + G_0 q'^2 = u^2,$$

on déduit des formules (7)

$$(8)\quad \begin{cases} E_0 p' + F_0 q' = \sqrt{E_0}\, u\cos\varphi, \\ \sqrt{E_0 G_0 - F_0^2}\, q' = \sqrt{E_0}\, u \sin\varphi. \end{cases}$$

Quant à p et à q, ils s'expriment en fonction de p' et de q' par les équations

$$(9)\quad \begin{cases} p = p' + ap'^2 + 2a'p'q' + a''q'^2 + \ldots, \\ q = q' + bp'^2 + 2b'p'q' + b''q'^2 + \ldots, \end{cases}$$

que l'on obtiendra en annulant dans les formules (4) les valeurs de p_0 et de q_0.

Au moyen des équations (8) et (9), on peut exprimer p et q en fonction de u et de φ et substituer les valeurs obtenues dans l'expression de l'élément linéaire de la surface. Si nous employons d'abord les formules (9), nous aurons des résultats tels que les suivants

$$(10)\quad \begin{cases} E = E_0 + e_0 p' + e'_0 q' + \ldots, \\ F = F_0 + f_0 p' + f'_0 q' + \ldots, \\ G = G_0 + g_0 p' + g'_0 q' + \ldots; \end{cases}$$

puis

$$(11)\quad \begin{cases} dp = dp' + \ldots, \\ dq = dq' + \ldots, \end{cases}$$

les termes négligés contenant tous p' ou q' en facteur.

Il suit de là que l'on peut écrire

$$(12)\quad ds^2 = E_0\, dp'^2 + 2F_0\, dp'\, dq' + G_0\, dq'^2 + H\, dp'^2 + 2K\, dp'\, dq' + L\, dq'^2,$$

H, K, L étant des séries qui ne contiendront aucun terme indépendant de p' et de q'.

Si nous substituons maintenant dans la première partie

$$E_0\, dp'^2 + 2F_0\, dp'\, dq' + G_0\, dq'^2$$

les valeurs (8) de p' et de q', elle devient

$$du^2 + u^2\, dv^2.$$

Comme la différence $ds^2 - du^2$ doit contenir dv^2 en facteur, on aura nécessairement

$$H\, dp'^2 + 2K\, dp'\, dq' + L\, dq'^2 = M\, dv^2;$$

et l'on reconnaît immédiatement que M sera une série, ordonnée suivant les puissances de u, dont tous les termes seront au moins du troisième degré par rapport à u, les coefficients étant des fonctions entières de $\sin v$ et de $\cos v$. De cette manière, l'équation (12) prendra la forme

$$ds^2 = du^2 + \lambda^2\, dv^2,$$

où l'on aura

$$\lambda^2 = u^2 + 2Nu^3 + \ldots$$

et, par suite,

$$\lambda = u + Nu^2 + Pu^3 + Qu^4 + Ru^5 + \ldots, \tag{13}$$

les coefficients étant, ici encore, des fonctions entières de $\sin v$ et de $\cos v$. Nous allons obtenir des résultats plus précis en raisonnant de la manière suivante.

657. La courbure totale de la surface, calculée avec les variables primitives p et q par les formules que nous avons données, est évidemment une fonction développable suivant les puissances de p et de q. Si l'on y remplace p et q par leurs expressions en u et v, il est clair que l'on obtiendra un résultat de la forme

$$\frac{-1}{RR'} = A + Bu + Cu^2 + \ldots, \tag{14}$$

où le coefficient de u^n sera un polynôme homogène et de degré n en $\sin v$, $\cos v$.

Admettons cette conclusion, qu'il serait facile d'établir autrement. Si, dans la formule (2), on substitue les valeurs précédentes

de λ et de RR', on obtient l'identité

$$(A + Bu + Cu^2 + \ldots)(u + Nu^2 + \ldots) = 2N + 6Pu + \ldots,$$

d'où l'on déduit, en égalant les coefficients des mêmes puissances de u dans les deux membres,

$$N = 0, \qquad A = 6P, \qquad B = 12Q, \qquad C + AP = 20R, \qquad \ldots$$

et, par suite,

$$N = 0, \qquad P = \frac{A}{6}, \qquad Q = \frac{B}{12}, \qquad R = \frac{C}{20} + \frac{A^2}{120}, \qquad \ldots.$$

On voit donc que l'on a définitivement

$$(15) \qquad \lambda = u + Pu^3 + Qu^4 + Ru^5 + Su^6 + \ldots,$$

le coefficient de u^3 étant une constante, qui est égale au sixième de la courbure totale en C changée de signe, et, d'une manière générale, le coefficient de u^n étant un polynôme homogène d'ordre $n - 3$ par rapport à $\sin v$ et à $\cos v$.

En particulier, les expressions de Q et de R seront

$$(16) \qquad \begin{cases} Q = a\cos v + b\sin v, \\ R = a'\cos^2 v + b'\sin^2 v + 2c'\sin v\cos v, \end{cases}$$

a, b, a', b', c' étant des constantes d'ailleurs quelconques.

Il nous paraît très intéressant que λ revête une forme aussi particulière, quelle que soit la surface considérée. Il semble, en effet, que l'on pourrait choisir λ arbitrairement parmi les fonctions qui sont assujetties à l'unique condition de s'annuler avec u. Mais il faut conclure de notre analyse que, si l'expression de λ ne rentre pas dans la forme que nous avons donnée, la surface présentera une singularité au point C.

Avec l'expression précédente de λ, la courbure totale sera déterminée par l'équation

$$(17) \qquad \frac{1}{RR'} = -6P - 12Qu + (6P^2 - 20R)u^2 + (18PQ - 30S)u^3 + \ldots,$$

que l'on obtient en appliquant la formule (2).

658. Nous allons maintenant étudier une autre question et montrer que la plus courte distance géodésique de deux points

A et B pris dans la région qui environne le point C (*fig.* 68) *a son carré développable en série suivant les puissances entières et positives des coordonnées* p, q *et* p_0, q_0 *des deux points, pourvu que ces deux points soient suffisamment rapprochés de* C.

Supposons que p_0, q_0 soient les coordonnées de A. Nous avons vu qu'une géodésique passant par ce point est définie par les deux équations (4). Comme on a, pour des valeurs nulles de p' et de q',

$$\frac{\partial(p, q)}{\partial(p', q')} = 1,$$

on peut résoudre ces équations (4) par rapport à p' et à q' et obtenir ainsi pour ces variables des expressions

$$p', q' = \mathrm{P}(p_0, q_0, p - p_0, q - q_0), \tag{18}$$

où le symbole P désigne des séries ordonnées suivant les puissances des quatre variables p_0, q_0, $p - p_0$, $q - q_0$; et il résulte d'ailleurs des propositions générales de la théorie des fonctions que ces séries seront convergentes tant que les modules de ces variables n'atteindront pas certaines limites, déterminées pour chacune d'elles. Par exemple, si $2l$ désigne la plus petite de ces limites, les séries seront convergentes pour toutes les valeurs des variables dont le module sera inférieur à $2l$. Nous allons montrer que *ces séries peuvent être ordonnées suivant les puissances entières de* p, q, p_0, q_0 *et rester convergentes tant que les modules de ces nouvelles variables sont inférieurs à* l.

En effet, si les modules de p, q, p_0, q_0 sont inférieurs à l, ceux des variables anciennes p_0, q_0, $p - p_0$, $q - q_0$ sont certainement inférieurs à $2l$ et, par suite, les séries (18) sont absolument convergentes. On pourra donc grouper comme on voudra les termes de ces séries sans altérer ni la convergence, ni la somme totale de chacune d'elles. D'après cela, réunissons en un seul groupe, dans chaque série (18), tous les termes qui sont du même degré par rapport à p_0, q_0, $p - p_0$, $q - q_0$; puis développons par la formule du binôme les puissances des différences $p - p_0$, $q - q_0$. Nous aurons ainsi les séries (18) ordonnées suivant les puissances de p, q, p_0, q_0 et d'ailleurs convergentes, comme il fallait le démontrer.

Si, maintenant, on porte les valeurs de p', q' dans la formule (6)

$$\theta^2 = E^0 p'^2 + 2F^0 p'q' + G^0 q'^2,$$

où E^0, F^0, G^0 sont développables suivant les puissances de p_0, q_0, on reconnaîtra que θ^2 *est développable en série convergente ordonnée suivant les puissances de* p, q, p_0, q_0 *quand les deux points* A *et* B *sont suffisamment voisins du point* C. Telle est la proposition générale qu'il s'agissait d'établir.

659. Imaginons maintenant qu'aux variables p et q on substitue les coordonnées polaires u et v. Le développement de θ^2 deviendra une série ordonnée suivant les puissances de u, u_0 et dont les coefficients seront des fonctions entières de $\sin v$, $\cos v$, $\sin v_0$, $\cos v_0$.

Les termes de degré moindre de cette série s'obtiennent aisément par l'application de la méthode précédente. On trouvera ainsi

$$(19) \qquad \theta^2 = u^2 + u_0^2 - 2uu_0 \cos(v - v_0) + \Omega,$$

Ω contenant les termes du troisième ordre et des ordres supérieurs. Mais on pourrait établir ce résultat par un raisonnement *a priori*. En effet, lorsque u et u_0 deviennent infiniment petits, l'expression de θ^2 doit se réduire à ce qu'elle est dans le cas du plan, et cette simple remarque permet d'écrire la formule précédente. Pour calculer Ω, nous nous appuierons uniquement sur l'équation aux dérivées partielles

$$(20) \qquad \Delta\theta = \left(\frac{\partial\theta}{\partial u}\right)^2 + \frac{1}{\lambda^2}\left(\frac{\partial\theta}{\partial v}\right)^2 = 1,$$

à laquelle doit satisfaire θ, considérée comme fonction des variables u et v. Le calcul se trouve beaucoup simplifié par les remarques suivantes.

Si l'on fait $u_0 = 0$, on a exactement $\theta^2 = u^2$, $\Omega = 0$. Tous les termes de la série Ω doivent donc contenir u_0 en facteur. On démontrera de même qu'ils doivent admettre les facteurs u et $\sin(v - v_0)$ et la suite du calcul montre même que Ω doit être divisible par $u^2 u_0^2 \sin^2(v - v_0)$. Nous poserons donc

$$(21) \qquad \theta^2 = u^2 + u_0^2 - 2uu_0 \cos(v - v_0) + 2u^2 u_0^2 \sin^2(v - v_0)\psi.$$

On voit qu'il suffirait de connaître le premier terme de ψ pour obtenir une expression de θ^2 exacte jusqu'au cinquième ordre exclusivement. Pour déterminer ψ, nous allons exprimer que θ est une solution de l'équation (20); mais auparavant il convient de faire un changement de variables.

Posons

$$u\cos v = x, \qquad u\sin v = y. \tag{22}$$

Il est très facile de donner la signification géométrique des nouvelles variables x et y. Faisons correspondre, en effet, à chaque point M de la surface un point M′ du plan tangent en C par la construction suivante. Sur la tangente en C à la géodésique CM, portons une longueur CM′ égale à l'arc CM; x et y seront les coordonnées du point M′ par rapport à des axes rectangulaires ayant leur origine en C et situés dans le plan tangent.

Lorsqu'on substitue x et y à u et à v, les produits

$$2Qu, \quad (2R+P^2)u^2, \quad (2S+2PQ)u^3$$

deviennent des polynômes homogènes du premier, second, troisième degré par rapport à x et à y.

Nous poserons

$$\left\{\begin{aligned} 2Qu &= 2P_1,\\ (2R+P^2)u^2 &= 2P_2,\\ (2S+2PQ)u^3 &= 2P_3,\\ \ldots&\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right. \qquad \Pi = P+P_1+P_2+P_3+\ldots. \tag{23}$$

On aura

$$\lambda^2 = u^2 + 2\Pi u^4,$$

et l'élément linéaire se présentera sous la forme suivante :

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + 2\Pi(x\,dy - y\,dx)^2. \tag{24}$$

La courbure totale, qui est déterminée par l'équation (17), aura pour expression nouvelle

$$\left\{\begin{aligned} \frac{-1}{RR'} = {} & 6P+12P_1+20P_2\\ & -16P^2(x^2+y^2)+30P_3-48PP_1(x^2+y^2)+\ldots. \end{aligned}\right. \tag{25}$$

L'équation à laquelle doit satisfaire θ prendra la forme

$$(26)\qquad \left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\theta}{\partial y}\right)^2+2\Pi\left(x\frac{\partial\theta}{\partial x}+y\frac{\partial\theta}{\partial y}\right)^2=1+2\Pi(x^2+y^2),$$

que l'on peut obtenir directement par le calcul de $\Delta\theta$ [II, p. 425]; et enfin l'expression de θ^2 deviendra

$$(27)\qquad \theta^2=(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+2\psi\sigma^2,$$

σ désignant le déterminant

$$(28)\qquad \sigma=xy_0-yx_0.$$

Il ne reste plus qu'à substituer la valeur de θ dans l'équation aux dérivées partielles (26), et l'on obtiendra, en supprimant le facteur σ^2, l'équation

$$\begin{aligned}
0={}&-\Pi+\psi+(x-x_0)\frac{\partial\psi}{\partial x}+(y-y_0)\frac{\partial\psi}{\partial y}-2\Pi\psi(x^2+y^2)\\
&+2\Pi\left(x\frac{\partial\psi}{\partial x}+y\frac{\partial\psi}{\partial y}+2\psi\right)(x^2+y^2-xx_0-yy_0)\\
&+2\sigma\psi\left(y_0\frac{\partial\psi}{\partial x}-x_0\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)+\frac{1}{2}\sigma^2\left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2\right]\\
&+2\psi^2(x_0^2+y_0^2)+\sigma^2\Pi\left(x\frac{\partial\psi}{\partial x}+y\frac{\partial\psi}{\partial y}+2\psi\right)^2,
\end{aligned}$$

qui fera connaître ψ. Posons

$$(29)\qquad \psi=\psi_0+\psi_1+\psi_2+\ldots,$$

ψ_i désignant l'ensemble des termes de degré i. En égalant à zéro l'ensemble des termes de même degré dans l'équation précédente, on obtient les relations

$$(30)\qquad \left\{\begin{aligned}
&\psi_0-P=0,\\
&\psi_1+(x-x_0)\frac{\partial\psi_1}{\partial x}+(y-y_0)\frac{\partial\psi_1}{\partial y}-P_1=0,\\
&\psi_2+(x-x_0)\frac{\partial\psi_2}{\partial x}+(y-y_0)\frac{\partial\psi_2}{\partial y}\\
&\qquad+2P^2[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2]-P_2=0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}\right.$$

qui permettent de déterminer sans difficulté les *polynômes* ψ_i. Désignons par l'indice supérieur o le résultat de la substitution

de x_0, y_0 à x et à y. On trouvera ainsi

$$(31)\quad \left\{\begin{aligned} \psi_0 &= \mathrm{P}, \\ \psi_1 &= \frac{\mathrm{P}_1 + \mathrm{P}_1^0}{2}, \\ \psi_2 &= -\frac{2\mathrm{P}^2}{3}[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2] \\ &\quad + \frac{1}{3}\left[\mathrm{P}_2 + \mathrm{P}_2^0 + \frac{1}{2}\left(x_0\frac{\partial \mathrm{P}_2}{\partial x} + y_0\frac{\partial \mathrm{P}_2}{\partial y}\right)\right]. \end{aligned}\right.$$

On calculera de même $\psi_3, \psi_4, \psi_5, \ldots$. Mais les expressions précédentes, qui permettent d'obtenir le carré de la distance géodésique jusqu'aux termes du sixième ordre, nous suffiront amplement.

660. Si l'on revient maintenant aux variables primitives u et v, on aura, en se bornant, par exemple, aux termes du cinquième ordre,

$$(32)\quad \left\{\begin{aligned} \theta^2 &= u^2 + u_0^2 - 2uu_0\cos(v - v_0) \\ &\quad + u^2u_0^2\sin^2(v-v_0)[2\mathrm{P} + \mathrm{Q}u + \mathrm{Q}_0u_0], \end{aligned}\right.$$

Q_0 désignant ce que devient Q lorsqu'on y remplace v par v_0. Si l'on veut d'ailleurs obtenir les termes du sixième ordre, il suffira d'ajouter dans les crochets la valeur suivante de $2\psi_2$:

$$(33)\quad \left\{\begin{aligned} 2\psi_2 &= \left(\frac{2\mathrm{R}}{3} - \mathrm{P}^2\right)u^2 + \left(\frac{2\mathrm{R}_0}{3} - \mathrm{P}^2\right)u_0^2 \\ &\quad + \left(\frac{2\mathrm{R}}{3} + 3\mathrm{P}^2\right)uu_0\cos(v-v_0) - \frac{1}{3}\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial v}uu_0\sin(v-v_0). \end{aligned}\right.$$

L'égalité (32) contient le théorème qui a été établi par Legendre pour les triangles sphériques infiniment petits et qui a été étendu par Gauss, dans les *Disquisitiones,* à tous les triangles géodésiques infiniment petits tracés sur une surface quelconque. Conservons les notations précédentes. Soient A le point de coordonnées u_0, v_0, B le point de coordonnées u, v. Le triangle ABC (*fig.* 68) aura ses côtés composés de lignes géodésiques; et, si l'on désigne par a, b, c, A, B, C les côtés et les angles de ce triangle, on aura

$$u = a, \qquad u_0 = b, \qquad v - v_0 = \mathrm{C}.$$

Si l'on désigne ensuite par α, β, γ les valeurs de la courbure

totale aux trois sommets A, B, C respectivement, la formule (17) nous donnera, si nous ne conservons que les deux premiers termes,

$$\gamma = -6P, \qquad \alpha = -6P - 12 Q_0 u_0, \qquad \beta = -6P - 12 Q u.$$

On déduit de là

$$(34) \qquad \begin{cases} 6P = -\gamma, \quad 12 Q u = \gamma - \beta, \quad 12 Q_0 u_0 = \gamma - \alpha, \\ 2P + Q u + Q_0 u_0 = -\dfrac{\beta + \alpha + 2\gamma}{12}. \end{cases}$$

L'équation (32) prendra donc la forme *entièrement géométrique*

$$(35) \qquad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C - \frac{a^2 b^2 \sin^2 C}{12}(\alpha + \beta + 2\gamma),$$

où l'on néglige seulement les termes à partir du sixième ordre.

Construisons un *triangle rectiligne auxiliaire* dont les côtés seront a, b, c et désignons par A^0, B^0, C^0 les angles de ce triangle. On a

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C^0.$$

En retranchant de l'équation (35) et divisant par ab, nous trouverons la relation

$$\cos C - \cos C^0 = -\frac{ab\sin^2 C}{24}(\alpha + \beta + 2\gamma),$$

exacte jusqu'au troisième ordre *inclusivement*, et d'où il résulte que la différence entre C et C^0 est du second ordre. Il suit de là que l'on peut négliger le carré de cette différence et remplacer, dans la formule précédente,

$$\cos C - \cos C^0 \quad \text{et} \quad ab\sin^2 C$$

respectivement par

$$(C^0 - C)\sin C^0 \quad \text{et} \quad ab\sin^2 C^0.$$

On obtient ainsi

$$C = C^0 + \frac{ab\sin C^0}{24}(\alpha + \beta + 2\gamma).$$

Si l'on pose

$$S^0 = \frac{ab\sin C^0}{2},$$

S^0 sera l'aire du triangle rectiligne auxiliaire, et l'on aura

$$C = C^0 + \frac{S^0}{12}(\alpha + \beta + 2\gamma).$$

Par raison de symétrie, on peut écrire les trois équations de Gauss

$$(36)\qquad \begin{cases} A = A^0 + \dfrac{S^0}{12}(2\alpha + \beta + \gamma), \\ B = B^0 + \dfrac{S^0}{12}(\alpha + 2\beta + \gamma), \\ C = C^0 + \dfrac{S^0}{12}(\alpha + \beta + 2\gamma), \end{cases}$$

qui ramènent la résolution du triangle géodésique à celle d'un triangle plan et qui sont exactes jusqu'aux termes du troisième ordre inclusivement. Si on les ajoute, on trouve

$$(37)\qquad A + B + C - \pi = \frac{S^0}{3}(\alpha + \beta + \gamma).$$

Dans le cas de la sphère, on a

$$\alpha = \beta = \gamma = \frac{1}{R^2},$$

et l'on retrouve le théorème de Legendre.

On peut, du reste, déduire de l'expression seule de θ^2 tous les éléments du triangle géodésique. La formule relative à la différentielle d'un segment [II, p. 417] nous donne, en effet, les relations suivantes, obtenues en faisant varier successivement une seule des coordonnées u, v, u_0, v_0,

$$(38)\qquad \frac{\partial\theta}{\partial u} = \cos B, \qquad \frac{\partial\theta}{\partial u_0} = \cos A, \qquad \frac{\partial\theta}{\partial v} = \lambda \sin B, \qquad \frac{\partial\theta}{\partial v_0} = -\lambda_0 \sin A,$$

λ_0 désignant la valeur que prend λ au point $A(u_0, v_0)$. On peut remarquer que λ, λ_0 sont ce que nous avons appelé, avec M. Christoffel (n° 633), les *longueurs réduites* des côtés a et b. Désignons-les par $\lambda(a)$, $\lambda(b)$; des formules précédentes, on déduit l'égalité

$$\lambda(a)\sin B - \lambda(b)\sin A = \frac{\partial\theta}{\partial v} + \frac{\partial\theta}{\partial v_0} = \frac{u^2 u_0^2 \sin^2(v - v_0)}{\theta}\left(\frac{\partial\psi}{\partial v} + \frac{\partial\psi}{\partial v_0}\right),$$

d'où il résulte que le premier membre est du quatrième ordre par

rapport aux longueurs des côtés. On a donc

$$\frac{\lambda(a)}{\sin A} = \frac{\lambda(b)}{\sin B} = \frac{\lambda(c)}{\sin C}, \tag{39}$$

en négligeant seulement les termes à partir du quatrième ordre (¹).

661. Il nous reste, pour compléter les résultats précédents, à faire connaître la surface du triangle géodésique. Il nous suffira

---

(¹) Les résultats que nous avons donnés dans le texte nous permettent d'obtenir des formules analogues à celles de Gauss, mais où l'approximation est poussée plus loin, jusqu'aux termes du quatrième ordre. Pour donner à ces formules une apparence entièrement géométrique, il faut introduire les valeurs de la courbure totale pour certains points du triangle, par exemple pour les milieux des côtés. Nous désignerons par α', β', γ' les valeurs de la courbure totale pour les milieux des côtés a, b, c respectivement.

Les coordonnées des milieux des deux côtés a et b s'obtiennent sans difficulté et permettent de calculer très aisément les quantités α', β'. Mais, pour obtenir γ', il faut déterminer le milieu de la géodésique AB. L'équation de cette géodésique peut être donnée sous différentes formes; et, si l'on utilise, par exemple, la dernière des équations (38), on reconnaît que les coordonnées u, v de tout point de AB doivent satisfaire à l'équation

$$\frac{\partial \theta}{\partial v} = -\lambda_0 \sin A. \tag{a}$$

Cette équation, jointe à la suivante

$$\theta = \frac{c}{2},$$

permettrait de déterminer les coordonnées du milieu de AB; mais, pour faire le calcul avec élégance, il est préférable de revenir aux coordonnées x et y qui sont définies par les formules (22) et que nous avons déjà employées avec avantage. On trouve ainsi que, si X, Y désignent les coordonnées du milieu de AB, la formule (a) nous donne

$$X y_0 - Y x_0 = \frac{bc \sin A}{2}(1 + \varepsilon_2),$$

ε_2 désignant un infiniment petit du second ordre. Par raison de symétrie, on aura de même

$$x Y - y X = \frac{ac \sin B}{2}(1 + \varepsilon'_2),$$

et l'on déduit de ces deux formules que l'on aura, comme il est aisé de le vérifier,

$$X = \frac{x + x_0}{2}, \qquad Y = \frac{y + y_0}{2}, \tag{b}$$

les termes négligés étant du troisième ordre et des ordres supérieurs.

d'imiter la méthode que Gauss a donnée, pour cet objet, dans les *Disquisitiones*.

Si l'on fait glisser infiniment peu (*fig.* 69) le sommet B en B' sur le prolongement de AB, u et v prendront des accroissements du, dv, et la surface S croîtra de la quantité

$$\frac{\partial S}{\partial u}\,du + \frac{\partial S}{\partial v}\,dv.$$

Ce point étant établi, le calcul ne présente plus aucune difficulté. On a, en effet, par la formule (25) et en négligeant seulement les termes du troisième ordre,

$$\frac{1}{RR'} = -6P - 12P_1 - 20P_2 + 16P^2(x^2 + y^2),$$

et de là on déduit les expressions suivantes des six courbures cherchées

$$\begin{aligned}
\gamma &= -6P,\\
\alpha &= -6P - 12P_1^0 - 20P_2^0 + 16P^2b^2,\\
\beta' &= -6P - 6P_1^0 - 5P_2^0 + 4P^2b^2,\\
\beta &= -6P - 12P_1 - 20P_2 + 16P^2a^2,\\
\alpha' &= -6P - 6P_1 - 5P_2 + 4P^2a^2,\\
\gamma' &= -6P - 6P_1 - 6P_1^0 - 5P_2 - 5P_2^0 - 5\Delta P_2 + 4P^2(a^2 + b^2 + 2ab\cos C),
\end{aligned}$$

l'indice supérieur o indiquant le résultat de la substitution de x_0 et de y_0 à x et à y, et le symbole Δ désignant l'opération

$$x_0\frac{\partial}{\partial x} + y_0\frac{\partial}{\partial y}.$$

Comme on a, d'après les équations (21) et (31),

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C + 2\psi a^2b^2\sin^2 C,$$

$$2\psi = 2P + P_1 + P_1^0 - \frac{4P^2}{3}[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2] + \frac{2}{3}(P_2 + P_2^0) + \frac{1}{3}\Delta P_2,$$

on pourra éliminer les six coefficients qui entrent dans P, P_1, P_2, et l'on sera ainsi conduit à la formule

$$2\psi = \frac{\alpha + \beta - 2\gamma - 8\alpha' - 8\beta' - 4\gamma'}{60} - \frac{\gamma^2}{45}(a^2 + b^2 - 4ab\cos C).$$

Introduisant l'angle C^0 du triangle plan auxiliaire, on trouvera par des calculs faciles la relation

$$(c)\qquad C - C^0 = S^0\left[\frac{8\alpha' + 8\beta' + 4\gamma' + 2\gamma - \alpha - \beta}{60} + \gamma^2\,\frac{7(a^2 + b^2) + c^2}{360}\right]$$

qui remplace la dernière des équations (36) et qui est exacte maintenant jusqu'aux termes du quatrième ordre inclusivement.

Or on a ici

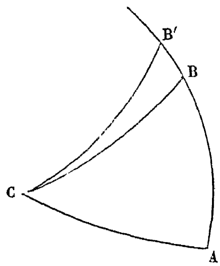
$$du = \cos B\, ds = \frac{\partial \theta}{\partial u}\, ds,$$

$$\lambda\, dv = \sin B\, ds = \frac{1}{\lambda}\,\frac{\partial \theta}{\partial v}\, ds,$$

ce qui donne, pour l'accroissement dS, l'expression

$$ds\left[\frac{\partial S}{\partial u}\,\frac{\partial \theta}{\partial u} + \frac{1}{\lambda^2}\,\frac{\partial S}{\partial v}\,\frac{\partial \theta}{\partial v}\right].$$

Fig. 69.



D'autre part, cet accroissement est l'aire BCB′, qui a pour valeur

$$dv\int_0^u \lambda\, du = dv\left[\frac{u^2}{2} + \frac{P u^4}{4} + \frac{Q u^5}{5} + \ldots\right],$$

ou, si l'on remplace dv par sa valeur,

$$\frac{1}{\lambda^2}\,\frac{\partial \theta}{\partial v}\, ds\left[\frac{u^2}{2} + \frac{P u^4}{4} + \frac{Q u^5}{5} + \ldots\right].$$

En égalant les deux expressions différentes de l'accroissement, on aura donc l'équation

$$(40)\qquad \frac{\partial \theta}{\partial u}\,\frac{\partial S}{\partial u} + \frac{1}{\lambda^2}\,\frac{\partial \theta}{\partial v}\left[\frac{\partial S}{\partial v} - \frac{u^2}{2} - \frac{P u^4}{4} - \frac{Q u^5}{5} - \ldots\right] = 0,$$

qui fera connaître S.

Comme la surface s'annule avec u, u_0, $\sin(v - v_0)$, nous pouvons poser

$$(41)\qquad S = \frac{1}{2}\, u u_0 \sin(v - v_0)(1 + H)$$

et, en substituant cette valeur de S, nous obtiendrons pour H

l'équation

$$\left(1+H+u\frac{\partial H}{\partial u}\right)\left[u-u_0\cos(v-v_0)-2\sigma u_0\sin(v-v_0)\psi+\sigma^2\frac{\partial\psi}{\partial u}\right]$$
$$+\left[1+2uu_0\cos(v-v_0)\psi-\sigma\frac{\partial\psi}{\partial v}\right]$$
$$\times\left[(1+H)u_0\cos(v-v_0)-u-\frac{Pu^3}{2}-\frac{2Qu^4}{5}-\ldots+u_0\sin(v-v_0)\frac{\partial H}{\partial v}\right]$$
$$\times[1-2Pu^2-2Qu^3+(3P^2-2R)u^4-(6PQ-2S)u^5+\ldots]=$$

On déduit de là, par un calcul que nous omettons,

$$(42)\quad\left\{\begin{aligned} H=&-\frac{P}{2}(u^2+u_0^2)+\frac{3P}{2}uu_0\cos(v-v_0)-\frac{2}{5}Qu^3-\frac{2}{5}Q_0u_0^3\\ &+\frac{3}{10}u^2u_0[3Q\cos(v-v_0)-Q_0]\\ &+\frac{3}{10}uu_0^2[3Q_0\cos(v-v_0)-Q],\end{aligned}\right.$$

les termes négligés étant du quatrième ordre et des ordres supérieurs.

Remplaçons Qu, Q_0u_0 par leurs valeurs tirées des formules (34) en fonction des courbures α, β, γ; puis substituons a, b, C à u, u_0, $v-v_0$. Nous aurons

$$\begin{aligned} H=&\ \frac{\alpha}{120}(4b^2+3a^2-9ab\cos C)\\ &+\frac{\beta}{120}(4a^2+3b^2-9ab\cos C)+\frac{\gamma}{120}(3a^2+3b^2-12ab\cos C),\end{aligned}$$

avec le même ordre d'approximation que précédemment.

L'expression de S peut s'écrire

$$S=\frac{ab\sin C}{2}(1+H).$$

Remarquons d'ailleurs qu'en négligeant seulement les termes du quatrième ordre, on a

$$\sin C=\sin C^0\left[1+\frac{ab\cos C}{24}(\alpha+\beta+2\gamma)\right].$$

On peut donc écrire, en substituant cette valeur de $\sin C$,

$$\begin{aligned} S&=S^0(1+H)\left[1+\frac{ab\cos C}{24}(\alpha+\beta+2\gamma)\right]\\ &=S^0\left[1+H+\frac{ab\cos C}{24}(\alpha+\beta+2\gamma)\right].\end{aligned}$$

En remplaçant H par sa valeur, on trouve

$$S = S^0\Big[1 + \frac{\alpha}{120}(4b^2 + 3a^2 - 4ab\cos C)$$
$$+ \frac{\beta}{120}(4a^2 + 3b^2 - 4ab\cos C) + \frac{\gamma}{120}(3a^2 + 3b^2 - 2ab\cos C)\Big].$$

Remarquons enfin que l'on peut, sans changer l'ordre d'approximation, remplacer $2ab\cos C$ par $2ab\cos C^0$ ou $a^2 + b^2 - c^2$, ce qui donne la formule définitive

$$(43)\qquad S = S^0\left[1 + \frac{(a^2 + b^2 + c^2)(\alpha + \beta + \gamma)}{60} - \frac{a^2\alpha + b^2\beta + c^2\gamma}{120}\right],$$

qui est parfaitement symétrique et qui est exacte jusqu'aux termes du quatrième ordre exclusivement.

Gauss a terminé les *Disquisitiones* en remarquant que, dans le cas de la sphère, la formule précédente devient

$$(44)\qquad S = S^0\left[1 + \frac{\alpha}{24}(a^2 + b^2 + c^2)\right],$$

et peut être remplacée par la suivante

$$(45)\qquad S = S^0\sqrt{\frac{\sin A \sin B \sin C}{\sin A^0 \sin B^0 \sin C^0}},$$

qui est calculable par logarithmes.

662. La démonstration du théorème de Gauss repose entièrement sur l'expression que nous avons donnée plus haut de la distance géodésique. Si l'on néglige les termes du cinquième ordre, cette expression prend la forme plus simple

$$(46)\qquad \theta^2 = u^2 + u_0^2 - 2uu_0\cos(v - v_0) + 2Pu^2u_0^2\sin^2(v - v_0).$$

Nous allons indiquer quelques applications de cette formule, ainsi que du théorème de Gauss.

Soit MM′ (*fig.* 70) une courbe quelconque tracée sur la surface. Nous supposerons qu'on ait placé en M l'origine des coordonnées polaires précédemment définies et que l'on compte les angles v en prenant pour origine la géodésique MP′ tangente en M à la courbe considérée.

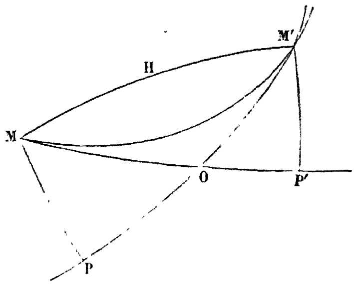
Si nous considérons un arc infiniment petit de cette courbe MM′,

son équation sera de la forme

$$(47) \qquad v = au + bu^2 + cu^3 + \ldots,$$

a, b, c désignant des constantes. Il faut, en effet, que v s'annule avec u.

Fig. 70.



L'arc s de la courbe sera défini par l'équation

$$\frac{ds^2}{du^2} = 1 + \lambda^2 \frac{dv^2}{du^2},$$

qui donne, par une extraction de racine carrée,

$$\frac{ds}{du} = 1 + \frac{a^2}{2} u^2 + 2abu^3 + \left(3ac + 2b^2 + \mathrm{P}a^2 - \frac{a^4}{8}\right) u^4 + \ldots$$

et, par suite,

$$(48) \quad s = u + \frac{a^2}{6} u^3 + \frac{ab}{2} u^4 + \left(3ac + 2b^2 + \mathrm{P}a^2 - \frac{a^4}{8}\right) \frac{u^5}{5} + \ldots.$$

On déduit de là, en résolvant par rapport à u,

$$(49) \quad u = s - \frac{a^2}{6} s^3 - \frac{ab}{2} s^4 + \left(\frac{13}{120} a^4 - \frac{\mathrm{P}}{5} a^2 - \frac{2}{5} b^2 - \frac{3}{5} ac\right) s^5 + \ldots.$$

Supposons que u, v soient les coordonnées du point M'. Si l'on appelle i l'angle de la tangente en M' avec la *corde géodésique* MHM', on aura

$$\sin i = \lambda \frac{dv}{ds} = u(1 + \mathrm{P}u^2) \frac{dv}{ds} = as + 2bs^2 + \left(a\mathrm{P} + 3c - \frac{2}{3} a^3\right) s^3 + \ldots.$$

En passant du sinus à l'arc, on trouve

$$(50)\qquad i = as + 2bs^2 + \left(a\mathrm{P} + 3c - \frac{1}{2}a^3\right)s^3 + \ldots;$$

et, par conséquent, on pourra calculer la courbure géodésique par la formule

$$\frac{ds}{\rho} = di + \frac{\partial\lambda}{\partial u}\,dv.$$

On obtient ainsi

$$(51)\qquad \frac{1}{\rho} = 2a + 6bs + (6a\mathrm{P} + 12c - 2a^3)s^2 + \ldots.$$

Appelons ρ_0 et ρ_1 les rayons de courbure en M et en M'. Nous aurons

$$(52)\qquad 2a = \frac{1}{\rho_0},\qquad 6bs = \frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_0} - (6a\mathrm{P} + 12c - 2a^3)s^2 + \ldots.$$

Nous pouvons dès à présent indiquer une application. Si l'on porte les valeurs de a et de bs tirées des équations précédentes dans le deuxième et le troisième terme de la formule (49), on trouve

$$(53)\qquad s - u = \frac{s^3}{24\rho_0\rho_1} + \left(\frac{7}{120}a^4 - \frac{3}{10}\mathrm{P}a^2 - \frac{2}{5}ac + \frac{2}{5}b^2\right)s^5 + \ldots.$$

Ainsi la différence entre l'arc et la corde géodésique est $\dfrac{s^3}{24\rho_0\rho_1}$, l'erreur commise étant seulement du cinquième ordre.

663. Supposons maintenant que l'on abaisse du point M' (*fig.* 70) une géodésique M'P' perpendiculaire sur la géodésique tangente en M. Soient, pour un instant, u_0 l'arc MP' et θ la géodésique M'P'. On aura

$$\theta^2 = u^2 + u_0^2 - 2uu_0\cos v + 2\mathrm{P}u^2u_0^2\sin^2 v,$$

et, pour exprimer que la géodésique est normale en P' à MP', il suffira évidemment d'annuler la dérivée de θ^2 par rapport à u_0 : cela donne l'équation

$$u_0 - u\cos v + 2\mathrm{P}u^2u_0\sin^2 v = 0,$$

qui fera connaître u_0. Il résulte de cette formule que la différence

entre u_0 et $u\cos v$ est du cinquième ordre. On peut écrire

$$u_0 = u\cos v - 2\mathrm{P}u^3\sin^2 v\cos v = u - \frac{uv^2}{2} + \frac{1}{24}a^4u^5 - 2\mathrm{P}a^2u^5.$$

La substitution de la valeur de v nous donne

$$(54)\qquad \left\{\begin{aligned} \mathrm{MP}' &= u - \frac{a^2u^3}{2} - abu^4 + \ldots \\ &= s - \frac{2a^2}{3}s^3 - \frac{3ab}{2}s^4 + \ldots. \end{aligned}\right.$$

En introduisant dans le deuxième et le troisième terme les valeurs de a et de b données par les formules (52), on trouvera

$$(55)\qquad \mathrm{MP}' = s - \frac{\rho_1 + 3\rho_0}{24\rho_0^2\rho_1}s^3,$$

l'erreur commise étant du cinquième ordre seulement.

Si l'on abaisse de même de M une perpendiculaire géodésique MP sur la géodésique tangente en M′, on aura, en échangeant ρ_0 et ρ_1 dans l'équation précédente,

$$(56)\qquad \mathrm{M'P} = s - \frac{\rho_0 + 3\rho_1}{24\rho_1^2\rho_0}s^3.$$

La combinaison des deux formules (55) et (56) nous donne l'équation

$$\mathrm{MP}' + \mathrm{M'P} - 2s = -\frac{s^3}{24\rho_0^2\rho_1^2}(\rho_0^2 + \rho_1^2 + 6\rho_0\rho_1)$$

Si l'on remarque maintenant que la différence

$$\rho_0^2 + \rho_1^2 - 2\rho_0\rho_1 = (\rho_0 - \rho_1)^2$$

est du second ordre par rapport à s, on voit que l'on pourra, sans changer le degré d'approximation, remplacer dans la parenthèse $\rho_0^2 + \rho_1^2$ par $2\rho_0\rho_1$, ce qui donnera

$$(57)\qquad \mathrm{MP}' + \mathrm{M'P} - 2s = -\frac{s^3}{3\rho_0\rho_1},$$

l'erreur commise étant du cinquième ordre seulement. En éliminant enfin le terme en $\dfrac{s^3}{\rho_0\rho_1}$ entre l'équation (53) et la précédente, on aura

$$(58)\qquad s = \frac{4}{3}u - \frac{\mathrm{MP}' + \mathrm{M'P}}{6};$$

et cette expression de l'arc sera encore exacte jusqu'aux termes du cinquième ordre exclusivement.

Les expressions de ρ_0 et de ρ_1 nous permettent encore d'écrire les formules

$$i = \widehat{\mathrm{MM'O}} = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{\rho} + \frac{2}{\rho_1}\right)s,$$

$$v = \widehat{\mathrm{M'MO}} = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{2}{\rho}\right)s,$$

que nous nous contenterons de signaler et où l'erreur commise est du troisième ordre.

664. La valeur de MP' a été obtenue par l'emploi de la formule (46) relative à la distance géodésique. On aurait pu aussi faire usage du théorème de Gauss en raisonnant de la manière suivante.

Considérons, d'une manière générale, un triangle géodésique ABC et conservons toutes les notations précédentes. Si l'on construit le triangle plan auxiliaire dont les côtés sont égaux à ceux du triangle géodésique, les angles de ce triangle, donnés par les formules (36), auront pour expressions

$$(59)\qquad \begin{cases} \mathrm{A}^0 = \mathrm{A} - \dfrac{\mathrm{S}^0}{3}\alpha, \\ \mathrm{B}^0 = \mathrm{B} - \dfrac{\mathrm{S}^0}{3}\alpha, \\ \mathrm{C}^0 = \mathrm{C} - \dfrac{\mathrm{S}^0}{3}\alpha, \end{cases}$$

α étant la courbure en un point quelconque du triangle et l'erreur commise étant maintenant du troisième ordre. *Tant qu'il sera permis de négliger cette erreur, on pourra donc traiter le triangle géodésique comme un triangle plan, à la condition d'ajouter* $-\frac{\mathrm{S}_0}{3}\alpha$ *à chacun de ses angles.*

Appliquons cette remarque au triangle MM'P'. La surface de ce triangle est sensiblement égale à

$$\frac{1}{2}\overline{\mathrm{MM'}} \times \overline{\mathrm{MP'}} \sin v = \frac{1}{2} v u^2 = \frac{a u^3}{2}.$$

La courbure totale en M est $-6\mathrm{P}$. On pourra donc assimiler le

triangle à un triangle plan, pourvu que l'on remplace l'angle en M, qui est v, par $v + aPu^3$ et l'angle en P, qui est droit, par $\frac{\pi}{2} + aPu^3$. Si l'on écrit maintenant la proportion des sinus, on obtient les égalités

$$\frac{M'P'}{\sin(v + aPu^3)} = \frac{u}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + aPu^3\right)} = \frac{MP'}{\cos(v + 2aPu^3)};$$

d'où l'on déduit les valeurs

$$MP' = u\cos v,$$
$$M'P' = u\sin v + aPu^4,$$

exactes, l'une et l'autre, jusqu'aux termes du cinquième ordre. Ces résultats sont d'accord avec ceux que nous avons donnés plus haut.

665. Une méthode analogue peut être appliquée au calcul du triangle MM'O. La surface de ce triangle étant à peu près la moitié de celle du triangle MM'P', il faudra substituer aux angles i et v les suivants

$$i' = i + \frac{aPu^3}{2} + \ldots,$$
$$v' = v + \frac{aPu^3}{2} + \ldots,$$

les termes négligés étant du quatrième ordre au moins. Alors la proportion des sinus nous donnera

$$\frac{OM}{\sin i'} = \frac{OM'}{\sin v'} = \frac{u}{\sin(i' + v')};$$

si l'on remplace i' et v' par leurs valeurs, on pourra obtenir pour OM et OM' des valeurs exactes jusqu'aux termes du quatrième ordre. On trouve ainsi

$$(60)\quad \left\{\begin{aligned} OM &= \frac{u}{2} + \frac{b}{4a}u^2 + \left(\frac{a^2}{6} + \frac{c}{2a} + \frac{P}{4} - \frac{3b^2}{8a^2}\right)u^3 + \ldots, \\ OM' &= \frac{u}{2} - \frac{b}{4a}u^2 + \left(\frac{a^2}{3} - \frac{c}{2a} - \frac{P}{4} + \frac{3b^2}{8a^2}\right)u^3 + \ldots. \end{aligned}\right.$$

Si, au lieu d'écrire la proportion des sinus, on emploie la formule

$$u = OM\cos v' + OM'\cos i',$$

on aura, par le développement des cosinus, l'équation

$$u - \text{OM} - \text{OM}' = -\text{OM}\frac{v'^2}{2} - \text{OM}'\frac{i'^2}{2} + \text{OM}\frac{v'^4}{24} + \text{OM}'\frac{i'^4}{24} + \ldots,$$

où l'on néglige seulement les termes du sixième ordre. Calculons le second membre en remarquant que le calcul est beaucoup facilité si on l'écrit sous la forme

$$-(\text{OM} + \text{OM}')\frac{v'^2}{2} + \text{OM}'\frac{v'^2 - i'^2}{2} + \text{OM}\frac{v'^4}{24} + \text{OM}'\frac{i'^4}{24} + \ldots.$$

En employant les valeurs précédentes de OM et de OM′, nous trouverons

$$u - \text{OM} - \text{OM}' = -\frac{a^2}{2}u^3 - \frac{3}{2}abu^4 - \left(b^2 + 2ac + \text{P}a^2 + \frac{a^4}{24}\right)u^5 + \ldots.$$

Si l'on remplace encore, dans les deux premiers termes, a et b par leurs valeurs (52), il viendra

$$u - \text{OM} - \text{OM}' = -\frac{s^3}{8\rho_0\rho_1}, \tag{61}$$

l'erreur commise étant seulement du cinquième ordre. En utilisant la formule (53), on voit que l'on a, au même ordre d'approximation,

$$\text{OM} + \text{OM}' = 3s - 2u. \tag{62}$$

Il ne nous reste plus qu'à donner l'expression de l'angle O de deux tangentes géodésiques infiniment voisines. D'après le théorème de Gauss, on aura, dans le triangle MOM′,

$$\imath + v + \pi - \text{O} - \pi = -\frac{3a\text{P}}{2}u^3,$$

d'où l'on déduit

$$\text{O} = i + v + \frac{3a\text{P}}{2}u^3.$$

Remplaçant i et v par leurs valeurs, on trouve

$$\text{O} = 2au + 3bu^2 + \left(4c + \frac{5a\text{P}}{2} - \frac{a^3}{3}\right)u^3. \tag{63}$$

En négligeant le troisième ordre, on a

$$\text{O} = i + v = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\rho_0} + \frac{1}{\rho_1}\right)s. \tag{64}$$

666. Dans la suite de cet Ouvrage, nous aurons à appliquer plus d'une fois les propositions générales qui ont été établies, dans ce Livre et dans le précédent, relativement aux lignes géodésiques. Nous terminerons ce que nous avons à dire maintenant sur ce sujet en indiquant rapidement la solution d'une belle question qui a été posée par les travaux de M. Christoffel, et dans laquelle M. Weingarten a employé de la manière la plus élégante le théorème de Gauss et les formules (36) données plus haut.

Considérons, sur une surface quelconque, un point A et menons par ce point deux lignes géodésiques AB, AC. En joignant les points B et C par une géodésique, on formera un triangle géodésique ABC, dont nous désignerons les six éléments par les lettres a, b, c, A, B, C. Ce triangle est complètement défini si l'on se donne les coordonnées u et v du point A, l'angle ω que fait la géodésique AB avec une courbe déterminée passant par A, par exemple avec la courbe de paramètre v, et enfin les trois éléments

$$AB = c, \qquad AC = b, \qquad \widehat{CAB} = A.$$

Les trois autres éléments B, C, a peuvent donc être regardés comme des fonctions bien déterminées des six quantités

$$b,\ c,\ A,\ u,\ v,\ \omega.$$

Cela posé, il pourra se présenter quatre cas distincts :

1° Les formules qui expriment B, C, a ne contiendront aucune des trois quantités u, v, ω. Il y aura alors *trois* relations distinctes entre les six éléments du triangle géodésique; et il résulte de la méthode précédente que ce nombre de trois relations est un maximum qui ne pourra être dépassé.

2° et 3° Les formules contiendront une ou plusieurs des quantités u, v, ω; mais on pourra éliminer u, v, ω entre les trois équations qui expriment B, C, a, de manière à obtenir soit *une*, soit *deux* relations entre les six éléments, relations qui seront vérifiées pour tout triangle géodésique tracé sur la surface.

4° Les formules qui font connaître B, C, a nous donneront pour ces trois éléments des fonctions des quantités u, v, ω qui seront réellement indépendantes; de sorte qu'il n'y aura, entre les six éléments d'un triangle géodésique, *aucune* relation indépendante des coordonnées de ses sommets.

D'après cela, on sera conduit à la classification suivante des surfaces, qui a été proposée par M. Christoffel, dans le remarquable Mémoire que nous avons déjà cité [p. 110].

La première classe comprendra les surfaces pour lesquelles il n'y a aucune relation entre les six éléments d'un triangle géodésique.

Toute surface qui n'appartient pas à la première classe, c'est-à-dire pour laquelle il y a une ou plusieurs relations entre les six éléments d'un triangle géodésique, sera de la *deuxième*, de la *troisième* ou de la *quatrième* classe suivant que le nombre de ces relations entre les éléments sera égal à *un*, à *deux* ou à *trois*.

Comme les formules qui déterminent les géodésiques ne dépendent que de l'élément linéaire, deux surfaces applicables l'une sur l'autre feront évidemment partie de la même classe. Le plan, par exemple, est une surface de la quatrième classe; il en sera donc de même de toutes les surfaces développables; et les relations seront les mêmes entre les éléments d'un triangle plan et ceux d'un triangle géodésique tracé sur une développable quelconque. De même, nous avons vu au n° 599 que l'élément linéaire de toute surface à courbure constante positive $\frac{1}{R^2}$ peut être ramené à la forme (16) [p. 46], qui convient aussi à une sphère de rayon R. Il suit de là qu'il y aura, entre les six éléments de tout triangle géodésique tracé sur la surface de courbure constante $\frac{1}{R^2}$, les relations fondamentales de la Trigonométrie sphérique,

$$(65)\quad \left\{\begin{aligned} \cos\frac{a}{R} &= \cos\frac{b}{R}\cos\frac{c}{R} + \sin\frac{b}{R}\sin\frac{c}{R}\cos A,\\ \cos\frac{b}{R} &= \cos\frac{c}{R}\cos\frac{a}{R} + \sin\frac{c}{R}\sin\frac{a}{R}\cos B,\\ \cos\frac{c}{R} &= \cos\frac{a}{R}\cos\frac{b}{R} + \sin\frac{a}{R}\sin\frac{b}{R}\cos C. \end{aligned}\right.$$

Dans un Mémoire déjà ancien [1], M. Minding a fait la remarque très importante, mais à peu près évidente, qu'il suffit de changer dans ces formules R en Ri pour obtenir les relations qui con-

---

[1] MINDING (F.), *Beiträge zur Theorie der kürzesten Linien auf krummen Flächen* (*Journal de Crelle*, t. XX, p. 323; 1840).

viennent pour tout triangle géodésique tracé sur une surface à courbure négative. Les équations (65) se transforment ainsi dans les suivantes

$$(66)\quad\left\{\begin{aligned}\cos\frac{ai}{R} &= \cos\frac{bi}{R}\cos\frac{ci}{R} + \sin\frac{bi}{R}\sin\frac{ci}{R}\cos A,\\ \cos\frac{bi}{R} &= \cos\frac{ci}{R}\cos\frac{ai}{R} + \sin\frac{ci}{R}\sin\frac{ai}{R}\cos B,\\ \cos\frac{ci}{R} &= \cos\frac{ai}{R}\cos\frac{bi}{R} + \sin\frac{ai}{R}\sin\frac{bi}{R}\cos C,\end{aligned}\right.$$

qui jouent, dans la trigonométrie des surfaces à courbure constante négative, le même rôle que les formules (65) dans la géométrie de la sphère.

Ainsi, toutes les surfaces à courbure constante appartiennent à la quatrième classe. Envisageons maintenant une surface quelconque de révolution que nous supposerons rapportée au système formé par les méridiens et les parallèles. Soient u et v les coordonnées d'un point quelconque de la surface, u étant le paramètre qui demeure constant sur chaque parallèle et v l'angle du plan méridien passant par le point avec un plan méridien fixe. Désignons par u_0, v_0, u_1, v_1, u_2, v_2 les coordonnées des trois sommets d'un triangle géodésique quelconque. Les six éléments de ce triangle seront des fonctions des six coordonnées précédentes; mais, comme on peut faire tourner la surface autour de son axe sans altérer les éléments du triangle géodésique, il est clair que ceux-ci ne dépendront effectivement que des trois quantités u_0, u_1, u_2 et des deux différences $v_2 - v_0$, $v_1 - v_0$, soit, en tout, *cinq* quantités. *Il y aura donc au moins une relation entre les six éléments du triangle géodésique.*

Ainsi, les surfaces de révolution et, plus généralement, toutes les surfaces qui sont applicables sur une surface de révolution, appartiendront à la deuxième, à la troisième ou à la quatrième classe.

667. M. Christoffel n'avait pas poussé plus loin ces recherches : il n'avait apporté aucun exemple d'une surface appartenant à la troisième classe, et il s'était contenté de démontrer que toute surface de la quatrième classe a nécessairement sa courbure totale

constante. M. Weingarten, qui a repris cette étude en 1882 [1], a démontré, par une méthode nouvelle, la proposition précédente de M. Christoffel, et il a réussi à établir de plus qu'il n'existe aucune surface de la troisième classe.

Désignons par u_0, v_0, u_1, v_1, u_2, v_2 les coordonnées des trois sommets d'un triangle géodésique. Les six éléments a, b, c, A, B, C du triangle seront des fonctions de ces six coordonnées. Par suite, si la surface appartient à la première classe, ces fonctions seront indépendantes et il sera impossible de déplacer infiniment peu le triangle géodésique sans le déformer, c'est-à-dire sans altérer au moins un de ses éléments; car les différentielles da, db, ... des éléments sont des fonctions indépendantes des différentielles des six coordonnées et ne peuvent s'annuler toutes sans qu'il en soit de même de ces dernières, du_0, dv_0, ... Si la surface appartient à la deuxième classe, on pourra se contenter d'exprimer cinq des éléments du triangle en fonction des coordonnées, le sixième sera donné par l'équation qui relie les six éléments. Si donc on veut déplacer le triangle sans en faire varier les six éléments, il suffira d'assujettir les six coordonnées à cinq relations distinctes. Il y aura donc une suite de positions du triangle dépendante d'un *seul* paramètre variable *et dans laquelle chaque sommet décrira une courbe*.

Si la surface appartient à la troisième ou à la quatrième classe, il y aura deux ou trois relations entre les six éléments; par suite, on exprimera quatre ou trois éléments en fonction des coordonnées des sommets, les autres étant définis par les relations qui existent, par hypothèse, entre les six éléments. Il suit de là que, si l'on veut déplacer le triangle sans altérer ses éléments, il faudra écrire seulement quatre ou trois relations distinctes entre les six coordonnées des sommets. En d'autres termes, ces six coordonnées seront fonctions de deux ou de trois variables indépendantes. Il suit de là que les coordonnées du sommet A sont des fonctions de deux ou de trois variables indépendantes, et, par suite, que ce sommet peut être déplacé d'une manière quelconque sur la surface.

---

(1) WEINGARTEN (J.), *Ueber die Verschiebbarkeit geodätischer Dreiecke in krummen Flächen* (*Sitzungsberichte der K. P. Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, p. 453).

A la vérité, on peut objecter que les coordonnées u_0 et v_0 de A peuvent ne pas être des fonctions distinctes des deux variables indépendantes; et, s'il en est ainsi, le sommet A sera assujetti à demeurer sur une courbe. Mais il est aisé de prouver que ce fait exceptionnel ne peut se présenter pour chacun des trois sommets du triangle géodésique.

En effet, si les trois sommets A, B, C étaient assujettis à demeurer respectivement sur trois courbes (A), (B), (C), leurs coordonnées seraient fonctions de trois paramètres, par exemple des arcs A_0A, B_0B, C_0C comptés sur ces courbes à partir d'origines fixes A_0, B_0, C_0. Deux au moins de ces paramètres, A_0A et B_0B par exemple, devraient être arbitraires, puisque la position des sommets doit dépendre de deux ou de trois paramètres distincts. Il suit de là que A et B pourraient être choisis arbitrairement et, par suite, que la distance géodésique AB de deux points A et B pris arbitrairement sur les courbes (A) et (B) devrait être constante, ce qui est évidemment absurde. Il est donc permis d'affirmer que l'un au moins des sommets du triangle géodésique peut être déplacé arbitrairement sur la surface. Cela suffit pour l'objet que nous avons en vue.

Reportons-nous aux formules (36). On peut en déduire des expressions de α, β, γ en fonction des éléments du triangle géodésique, telles que la suivante

$$\alpha = 3\,\frac{3(A-A^0)-(B-B^0)-(C-C^0)}{S^0}+\varepsilon, \tag{67}$$

ε étant une quantité qui est du second ordre par rapport aux éléments du triangle.

Supposons que la surface appartienne à la troisième ou à la quatrième classe : le sommet A pourra être amené en deux points quelconques A_0 et A_1 d'une certaine région de la surface sans que les éléments du triangle aient varié. Désignons par α_0 et α_1 les courbures de la surface en ces points ; on aura

$$\alpha_0 = 3\,\frac{3(A-A^0)-(B-B^0)-(C-C^0)}{S^0}+\varepsilon_0,$$

$$\alpha_1 = 3\,\frac{3(A-A^0)-(B-B^0)-(C-C^0)}{S^0}+\varepsilon_1.$$

Si donc on désigne, pour abréger, par K la quantité

$$K = 3\frac{3(A - A^0) - (B - B^0) - (C - C^0)}{S_0},$$

on aura

$$(68) \qquad \frac{\alpha_0}{\alpha_1} = \frac{K + \varepsilon_0}{K + \varepsilon_1}.$$

Il suffit de supposer que les dimensions du triangle diminuent indéfiniment pour reconnaître que le rapport précédent est égal à l'unité. Par suite, la surface a nécessairement sa courbure totale constante.

Ainsi la troisième et la quatrième classe de M. Christoffel se réunissent en une seule, qui comprend uniquement les surfaces à courbure totale constante.

668. Telle est la démonstration de M. Weingarten. Cet habile géomètre a essayé d'appliquer la même méthode aux surfaces de la deuxième classe; mais l'emploi du théorème de Gauss ne paraît pas devoir suffire à la définition complète des surfaces qui appartiennent à cette classe.

Nous avons vu que, dans ce cas, le triangle géodésique peut occuper une suite de positions qui dépend d'un seul paramètre variable, et dans laquelle chaque sommet décrit une courbe (Γ). Mais il n'y a aucune raison de supposer que les courbes (Γ) sont les mêmes pour tous les triangles possibles et ne changent pas quand les éléments de ces triangles prennent différentes valeurs. Du moins, la formule précédente (68) nous permet de conclure que toutes ces courbes (Γ) tendent, lorsque les côtés du triangle deviennent infiniment petits, vers les courbes (C) sur lesquelles la courbure totale de la surface demeure constante, et s'en rapprochent de manière à en être distantes de quantités infiniment petites du second ordre par rapport à ces côtés. Il résulte en effet de cette formule que les valeurs de la courbure totale en deux points distincts de la courbe décrite par le sommet A ont un rapport qui diffère de l'unité d'une quantité infiniment petite du second ordre par rapport aux côtés du triangle géodésique considéré.

Considérons ces courbes (C) sur chacune desquelles la courbure totale demeure constante. Nous allons montrer qu'elles forment une famille de *courbes parallèles*.

Soient, en effet, (C), (C′), (C″) trois d'entre elles, que nous supposerons infiniment voisines. Prenons sur ces trois courbes respectivement trois points infiniment voisins a, b, c, qui seront les sommets d'un triangle géodésique infiniment petit abc. Déplaçons ensuite ce triangle géodésique abc, sans changer ses éléments, de manière que le point a, par exemple, décrive sur sa trajectoire un arc fini aa_1. Le triangle viendra occuper une certaine position $a_1 b_1 c_1$ dans laquelle les points a_1, b_1, c_1 seront à des distances du second ordre des courbes (C), (C′), (C″) respectivement. Donc si on les ramène sur ces courbes par les plus courts chemins, en substituant, par exemple, à chaque point le pied de la perpendiculaire géodésique abaissée de ce point sur la courbe correspondante, on formera un triangle $a_2 b_2 c_2$ dont les sommets seront situés sur les trois courbes et dont les côtés ne différeront de ceux du triangle abc que de quantités infiniment petites du second ordre. On aura, en particulier,

$$a_2 b_2 = ab(1+\eta),$$

η étant du premier ordre. Il suit de là que, si l'on fait tourner ab autour de a, $a_2 b_2$ tournera autour de a_2; ab et $a_2 b_2$ passeront en même temps par un minimum. Donc les plus courtes distances de (C) et de (C′) seront les mêmes en deux points quelconques a et a_2. En d'autres termes, *les courbes* (C) *seront parallèles ou géodésiquement équidistantes.*

C'est là, à ce qu'il semble, tout ce que l'on peut déduire, en ce qui concerne les surfaces de seconde classe, du théorème de Gauss. M. von Mangoldt [1], à qui l'on doit cette remarque, a complété les recherches de M. Weingarten et il a pu établir par une méthode savante que *la seconde classe comprend seulement les surfaces de révolution à courbure totale variable.* On peut substituer aux développements en série donnés par M. von Mangoldt les remarques suivantes, qui ne sont peut-être pas à l'abri de toute objection, mais qui offrent cet avantage de reposer sur la considération d'un nouveau cas limite des triangles géodésiques.

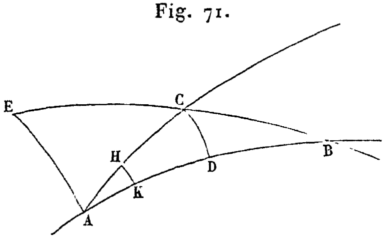
669. Considérons un triangle géodésique ABC, tracé sur une

---

(1) MANGOLDT (H. v.), *Ueber die Classification der Flächen nach der Verschiebbarkeit ihrer geodätischen Dreiecke* (*Journal de Crelle*, t. XCIV, p. 21; 1882).

surface quelconque, et supposons que, les côtés AB, AC, BC restant finis, le sommet C se rapproche indéfiniment d'un point déterminé situé entre A et B. Si l'on abaisse du point C la géodésique CD perpendiculaire sur AB, CD sera supposé infiniment petite (*fig.* 71). Il en sera de même des angles A, B, C, si nous désignons

Fig. 71.



par C, non l'angle du triangle, mais son supplément. On peut établir quelques formules intéressantes relatives à ces triangles particuliers.

Si l'on élève en A la géodésique AE, perpendiculaire à AB, elle pourra être aussi regardée, sans erreur sensible, comme normale à AC; et la définition même de la *longueur réduite* nous donnera les relations

$$\mathrm{AE} = [\mathrm{AC}]\mathrm{C} = [\mathrm{AB}]\mathrm{B},$$
$$\mathrm{CD} = [\mathrm{AC}]\mathrm{A} = [\mathrm{BC}]\mathrm{B},$$

[AC], [AB], [BC] désignant, d'après nos notations (n° 633), les longueurs réduites des trois côtés. En introduisant pour les côtés les notations habituelles, nous avons les formules

$$(69) \qquad \frac{\mathrm{A}}{[a]} = \frac{\mathrm{B}}{[b]} = \frac{\mathrm{C}}{[c]} = \frac{h}{[a][b]},$$

$$(70) \qquad \mathrm{AE} = [c]\mathrm{B} = h\frac{[c]}{[a]},$$

où h désigne la perpendiculaire CD. A ces deux équations, on peut joindre la suivante.

Désignons par p la perpendiculaire abaissée d'un point de AC sur AB et par q la perpendiculaire abaissée d'un point de BC; p et q, considérées comme fonctions de la distance u de leur pied au point A, sont deux solutions particulières de l'équation

$$(71) \qquad \frac{d^2 z}{du^2} + \frac{z}{\mathrm{RR}'} = 0,$$

si souvent employée au Chapitre V; et nous avons vu (n° 627) que, si l'on substitue à la géodésique AB le chemin formé des géodésiques AC et BC, la variation de longueur aura pour expression

$$(72) \qquad \mathrm{AC} + \mathrm{CB} - \mathrm{AB} = b + c - a = qp' - pq'.$$

Le binôme $qp' - pq'$ est une constante, dont on peut calculer la valeur pour tel point que l'on voudra, par exemple pour le point A. On a alors $p = 0$; le triangle infiniment petit AHK donne

$$p' = \mathrm{A}.$$

D'ailleurs, d'après l'équation (70), on a

$$q = \mathrm{AE} = [c]\mathrm{B}.$$

La substitution de ces valeurs de p, p', q dans la formule précédente la transforme dans l'équation suivante

$$(73) \qquad b + c - a = [c] \times \mathrm{A} \times \mathrm{B},$$

où l'on connaît la signification géométrique de chaque terme.

670. Telles sont les relations que nous allons appliquer au problème proposé. A cet effet, nous supposerons que la surface soit de seconde classe, c'est-à-dire qu'il y ait une relation, et une seule, entre les six éléments de tout triangle géodésique de la surface. Mettons cette relation sous la forme

$$b + c - a = f(a, b, \mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}),$$

et supposons, comme plus haut, que le point C se rapproche de AB d'une manière déterminée.

En divisant par $\mathrm{A} \times \mathrm{B}$ les deux membres de l'équation précédente et remplaçant dans le second membre A, B, C par leurs valeurs déduites des formules (69), on aura

$$\frac{b + c - a}{\mathrm{A} \times \mathrm{B}} = \frac{[a][b]}{h^2} f\left(a, b, \frac{h}{[b]}, \frac{h}{[a]}, \frac{h[c]}{[a][b]}\right).$$

Lorsque h tend vers zéro, le premier membre tend vers une limite déterminée $[c]$; il faut donc qu'il en soit de même du second. On reconnaît aisément que la limite de ce second membre est de la forme

$$\Phi\left(a, b \frac{[a]}{[c]}, \frac{[b]}{[c]}\right)$$

et ne peut, par suite, se réduire identiquement à $[c]$. En l'égalant à $[c]$, on aura donc nécessairement une relation

$$F(a, b, [a], [b], [c]) = 0, \tag{74}$$

où F a une forme tout à fait déterminée. Nous obtenons ainsi la propriété suivante de toute surface appartenant à la seconde classe :

Si l'on prend sur une géodésique quelconque trois points A, B, C, *il y aura nécessairement une relation indépendante des coordonnées des points* A, B, C *entre les segments* AB, BC *et les longueurs réduites* [AC], [BC], [AC].

Pour traduire géométriquement cette proposition, nous remarquerons que, si l'on se sert de l'équation différentielle (71) pour développer en série la longueur réduite d'un segment AB, on trouvera

$$[AB] = s - \alpha\frac{s^3}{6} - \alpha'\frac{s^4}{12} + \frac{\alpha^2 - 3\alpha''}{120}s^5 + \ldots,$$

s étant la longueur AB; α, α', α'' désignant la courbure totale et ses dérivées successives par rapport à l'arc, calculées pour le point A.

Cette formule permet d'obtenir aisément les longueurs réduites

$$[AB], \quad [AC], \quad [BC];$$

mais, pour simplifier le calcul, nous supposerons que l'on ait

$$AC = CB, \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad a = b.$$

On trouvera alors, en désignant par s la valeur commune de a et de b,

$$\begin{aligned}
[AC] = [a] &= s - \alpha\frac{s^3}{6} - \alpha'\frac{s^4}{12} + \frac{\alpha^2 - 3\alpha''}{120}s^5 + \ldots, \\
[CB] = [b] &= s - \alpha\frac{s^3}{6} - \alpha'\frac{s^4}{4} + \frac{\alpha^2 - 23\alpha''}{120}s^5 + \ldots, \\
[AB] = [c] &= 2s - 4\alpha\frac{s^3}{3} - \frac{4}{3}\alpha' s^4 + \frac{4}{15}(\alpha^2 - 3\alpha'')s^5 + \ldots,
\end{aligned}$$

α et ses dérivées étant calculées pour le point A.

En substituant les expressions précédentes dans la relation (74) et faisant tendre ensuite s vers zéro, on obtiendra évidemment une

relation

$$\Phi(\alpha, \alpha', \alpha'') = 0 \tag{75}$$

entre la courbure totale et ses deux premières dérivées par rapport à l'arc. Cette relation, qui aura lieu en chaque point de la géodésique, sera d'ailleurs la même pour toutes les géodésiques de la surface.

671. Si l'on rapproche ce résultat de ceux que nous avons déjà obtenus, on reconnaîtra aisément que la surface est applicable sur une surface de révolution. Choisissons, en effet, le système de coordonnées curvilignes formé avec les lignes à courbure constante et leurs trajectoires orthogonales. Comme ces trajectoires sont, nous l'avons vu plus haut, des géodésiques, l'élément linéaire sera réductible à la forme

$$ds^2 = du^2 + C^2\, dv^2,$$

et l'on aura de plus

$$\frac{1}{RR'} = -\frac{1}{C}\frac{\partial^2 C}{\partial u^2}.$$

En exprimant que RR' ne dépend que de u, on serait conduit à la forme suivante de C

$$C = \frac{U - V}{\sqrt{U'}}, \tag{76}$$

où U désigne une fonction de u et V une fonction de v, et qui convient à des surfaces bien plus générales que les surfaces de révolution. Mais nous laisserons ce point de côté pour le moment. Si l'on remplace, dans l'équation (75), α par une fonction déterminée de u, elle se ramène à la suivante

$$\psi\left(u, \frac{du}{ds}, \frac{d^2u}{ds^2}\right) = 0, \tag{77}$$

où ψ est aussi une fonction déterminée et qui convient à *toutes* les géodésiques de la surface.

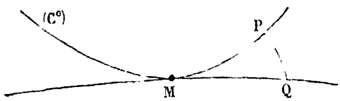
Considérons, en particulier, les géodésiques tangentes aux différents points de l'une des courbes de paramètre u_0, que nous désignerons par (C^0). Si M est un point de cette courbe, la géodésique tangente en M donnera lieu, dans le voisinage de ce point,

à l'équation

$$u - u_0 = \frac{s^2}{2\rho} + \ldots;$$

où ρ désigne le rayon de courbure géodésique de (C^0) en M, et qui résulte immédiatement de l'inspection du triangle MPQ dans la *fig.* 72.

Fig. 72.



On aura donc, au point M,

$$u = u_0, \qquad \frac{du}{ds} = 0, \qquad \frac{d^2u}{ds^2} = \frac{1}{\rho};$$

si l'on porte ces valeurs dans l'équation (77), on reconnaîtra immédiatement que la courbure géodésique en M est une fonction déterminée de u_0 et qu'elle est, par suite, constante en tous les points de (C^0).

Ce résultat nous suffit pleinement. Il est, en effet, très aisé de démontrer que, *si une famille de courbes parallèles est formée de cercles géodésiques, la surface est applicable sur une surface de révolution de telle manière que ces cercles géodésiques et les parallèles de la surface de révolution soient des courbes correspondantes.*

Cette proposition s'établit immédiatement : il suffit de remarquer qu'elle se traduit par l'équation

$$\frac{1}{C}\frac{\partial C}{\partial u} = \mathcal{F}(u),$$

où $\mathcal{F}$ est une fonction déterminée de u. L'intégration nous donne la forme suivante de C

$$C = f_1(u) f_2(v)$$

qui convient aux surfaces de révolution.

LIVRE VII.

LA DÉFORMATION DES SURFACES.

CHAPITRE I.

LES PARAMÈTRES DIFFÉRENTIELS.

Formules élémentaires relatives à deux courbes tracées sur une surface. — Définition des paramètres différentiels du premier ordre $\Delta\varphi$, $\Delta(\varphi, \psi)$, $\Theta(\varphi, \psi)$. — Paramètre du second ordre $\Delta_2\varphi$; méthode de M. Beltrami; formule analogue à celle de Green. — Expression du rayon de courbure géodésique d'une courbe au moyen des paramètres différentiels. — Les formations de M. Beltrami permettent d'obtenir tous les invariants différentiels de l'élément linéaire. — Emploi des paramètres différentiels dans la solution de divers problèmes où il s'agit de ramener l'élément linéaire à une forme spéciale. — Calcul des paramètres différentiels des fonctions les plus simples. — De l'emploi de l'invariant du second ordre dans l'étude du problème de la représentation conforme et des systèmes isothermes. — Démonstration, due à M. Beltrami, du théorème de Gauss relatif à l'expression de la courbure totale.

672. On sait toute l'importance du rôle attribué aux deux paramètres différentiels du premier et du second ordre de Lamé, soit en Physique mathématique, soit dans la théorie des coordonnées curvilignes de l'espace. M. Beltrami, dans une série de beaux travaux qui remonte à 1865 (¹), a constitué pour les surfaces une

(¹) Voir BELTRAMI, *Ricerche di analisi applicata alla Geometria* (*Giornale di Matematiche*, t. II; 1865).
— *Sulla teorica generale dei parametri differenziali* (*Memorie della Accademia delle Scienze dell' Istituto di Bologna*, série II, t. VIII; 1869).
— *Delle variabili complesse sopra una superficie qualunque* (*Annali di Matematica*, série II, t. I, p. 329; 1867).
— *Zur Theorie des Krümmungsmaasses* (*Mathematische Annalen*, t. I, p. 575; 1869).

théorie analogue et non moins utile, en suivant les idées et les méthodes déjà appliquées dans le cas de trois dimensions. C'est cette théorie que nous allons maintenant exposer, afin de compléter l'ensemble des notions fondamentales qui apparaissent dans la solution des différents problèmes de la théorie des surfaces.

Prenons l'élément linéaire sous la forme de Gauss

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2, \tag{1}$$

et soit

$$\varphi(u, v) = \text{const.}$$

l'équation d'une famille de courbes. Si l'on désigne par du, dv les différentielles relatives à un déplacement sur celle des courbes de la famille qui passe au point (u, v), on aura, comme on sait,

$$\frac{du}{ds} = \frac{1}{H\sqrt{\Delta\varphi}}\frac{\partial\varphi}{\partial v}, \qquad \frac{dv}{ds} = -\frac{1}{H\sqrt{\Delta\varphi}}\frac{\partial\varphi}{\partial u}, \tag{2}$$

H, $\Delta\varphi$ désignant les expressions suivantes, déjà employées,

$$H = \sqrt{EG - F^2}, \tag{3}$$

$$\Delta\varphi = \frac{E\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2 - 2F\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}\dfrac{\partial\varphi}{\partial v} + G\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2}{H^2}. \tag{4}$$

Le signe attribué, dans les formules (2), au radical $\sqrt{\Delta\varphi}$ correspondra au sens suivant lequel on se déplacera sur la courbe.

Imaginons maintenant que l'on se déplace à partir du point considéré suivant une autre courbe de la surface et représentons par la caractéristique δ les différentielles relatives à ce nouveau déplacement. Si l'on désigne par ω, ω' les angles qui déterminent les tangentes aux deux directions considérées, ω se rapportant à la courbe (φ), nous aurons (n° 496)

$$\sin(\omega - \omega') = H\,\frac{dv\,\delta u - du\,\delta v}{ds\,\delta s},$$

$$\cos(\omega - \omega') = \frac{E\,du\,\delta u + F(du\,\delta v + dv\,\delta u) + G\,dv\,\delta v}{ds\,\delta s}$$

ou, en substituant les valeurs de du, dv,

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} \delta s \sin(\omega-\omega') &= -\frac{1}{\sqrt{\Delta\varphi}}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\delta u+\frac{\partial\varphi}{\partial v}\delta v\right) = -\frac{\delta\varphi}{\sqrt{\Delta\varphi}},\\ \delta s \cos(\omega-\omega') &= \frac{\left(E\frac{\partial\varphi}{\partial v}-F\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)\delta u-\left(G\frac{\partial\varphi}{\partial u}-F\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)\delta v}{H\sqrt{\Delta\varphi}}\\ &= H\left[\frac{\partial\sqrt{\Delta\varphi}}{\partial\frac{\partial\varphi}{\partial v}}\delta u-\frac{\partial\sqrt{\Delta\varphi}}{\partial\frac{\partial\varphi}{\partial u}}\delta v\right]. \end{aligned}\right.$$

La première de ces formules peut s'écrire

$$(6)\qquad \sqrt{\Delta\varphi} = \frac{\delta\varphi}{\delta s\sin(\omega'-\omega)},$$

et, comme toutes les quantités qui figurent dans le second membre ont une signification absolument indépendante du choix des variables u et v, on reconnaît immédiatement que $\Delta\varphi$ est un invariant dont la valeur demeurera la même pour la même fonction φ et le même point, quel que soit le système de coordonnées auquel on rapporte la surface.

Le second membre de l'équation (6) peut être légèrement transformé. Remarquons, en effet, que

$$\delta s\sin(\omega'-\omega)$$

est la projection du déplacement δs sur la normale à la courbe (φ), le sens des projections positives correspondant à l'angle $\omega+\frac{\pi}{2}$. En désignant cette projection par δn, on aura donc

$$(7)\qquad \sqrt{\Delta\varphi} = \frac{\delta\varphi}{\delta n}.$$

Si l'on suppose que le déplacement ait lieu effectivement suivant la normale, on reconnaît que $\sqrt{\Delta\varphi}$ est la *dérivée de* φ *suivant la normale*. Cette propriété a déjà été établie d'une manière générale au n° 372.

Toutes les fois que la fonction φ satisfait à l'équation

$$(8)\qquad \Delta\varphi = 1,$$

nous avons vu que les courbes (φ), obtenues en égalant la fonction φ à une constante, sont parallèles les unes aux autres et l'on peut ajouter que $\varphi - \varphi_0$ désigne la longueur qu'il faut porter sur les géodésiques normales à l'une d'elles (φ_0) pour obtenir les différents points de la courbe (φ). Plus généralement, si φ satisfait à l'équation

$$\Delta\varphi = F(\varphi),$$

$F(\varphi)$ désignant une fonction quelconque de φ, on aura encore une famille de courbes parallèles; car, si l'on pose

$$\varphi' = \int \frac{d\varphi}{\sqrt{F(\varphi)}},$$

il vient

$$\Delta\varphi' = 1;$$

et, par conséquent, les courbes (φ') ou, ce qui est la même chose, les courbes (φ) seront parallèles.

Il ne sera pas inutile d'examiner le cas où la fonction φ satisfait à l'équation

$$\Delta\varphi = 0. \tag{9}$$

Alors, si l'on se déplace sur la courbe (φ), on aura

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u}\,du + \frac{\partial\varphi}{\partial v}\,dv = 0,$$

et, comme l'équation en φ ne contient que le rapport des dérivées de φ, on pourra éliminer ces dérivées, ce qui conduira à l'équation

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2 = 0.$$

Il y a donc deux familles pour lesquelles la fonction φ satisfait à l'équation (9) : ce sont les deux séries de courbes de longueur nulle; chacune d'elles peut être considérée soit comme formée de lignes géodésiques (n° 517), soit comme composée de courbes parallèles.

673. Du paramètre différentiel $\Delta\varphi$, nous pouvons, en appliquant une méthode générale, déduire d'autres invariants se rapportant à deux fonctions. Si l'on y remplace φ par $\varphi + \lambda\psi$, λ désignant

une constante quelconque, on obtiendra un résultat de la forme

$$\Delta(\varphi + \lambda\psi) = \Delta\varphi + 2B\lambda + \Delta\psi\lambda^2.$$

Le coefficient de λ sera évidemment un nouvel invariant que nous désignerons par $\Delta(\varphi, \psi)$. Le développement des calculs nous donne

$$(10) \qquad \Delta(\varphi, \psi) = \frac{E\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\psi}{\partial v} - F\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v} + \frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\psi}{\partial u}\right) + G\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial u}}{EG - F^2}.$$

On voit que, pour $\psi = \varphi$, $\Delta(\varphi, \psi)$ se réduit à $\Delta\varphi$.

On peut encore établir l'existence du nouvel invariant de la manière suivante. Imaginons que, dans les formules (5), δu, δv se rapportent à un déplacement sur une courbe de la famille

$$\psi(u, v) = \text{const.}$$

En appliquant les formules (2), on aura

$$\frac{\delta u}{\delta s} = \frac{1}{H\sqrt{\Delta\psi}}\frac{\partial\psi}{\partial v}, \qquad \frac{\delta v}{\delta s} = -\frac{1}{H\sqrt{\Delta\psi}}\frac{\partial\psi}{\partial u};$$

et la substitution des valeurs de δu, δv dans les formules (5) nous donnera

$$(11) \qquad \left\{\begin{aligned} \sin(\omega' - \omega) &= \frac{\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v} - \frac{\partial\psi}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial v}}{H\sqrt{\Delta\varphi}\sqrt{\Delta\psi}}, \\ \cos(\omega' - \omega) &= \frac{\Delta(\varphi, \psi)}{\sqrt{\Delta\varphi}\sqrt{\Delta\psi}}. \end{aligned}\right.$$

Ces relations mettent d'abord en évidence la propriété d'invariance du symbole $\Delta(\varphi, \psi)$; mais elles nous conduisent également à un nouvel invariant que nous désignerons par $\Theta(\varphi, \psi)$ et qui a pour expression

$$(12) \qquad \Theta(\varphi, \psi) = \frac{1}{H}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v} - \frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\psi}{\partial u}\right) = \frac{1}{H}\frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(u, v)}.$$

Les formules (11) s'écrivent alors de la manière suivante :

$$(11)' \qquad \sin(\omega' - \omega) = \frac{\Theta(\varphi, \psi)}{\sqrt{\Delta\varphi}\sqrt{\Delta\psi}}, \qquad \cos(\omega' - \omega) = \frac{\Delta(\varphi, \psi)}{\sqrt{\Delta\varphi}\sqrt{\Delta\psi}}.$$

Il résulte immédiatement de ces relations que, si l'on considère

les deux courbes définies par les équations

$$\varphi = 0, \qquad \psi = 0,$$

et un point commun à ces deux courbes, la condition pour qu'elles soient tangentes en ce point s'exprime par la relation

$$\Theta(\varphi, \psi) = 0,$$

et la condition pour qu'elles soient orthogonales, par l'équation

$$\Delta(\varphi, \psi) = 0.$$

Les formules (11)′ nous conduisent immédiatement à l'identité

$$\Theta^2(\varphi, \psi) + \Delta^2(\varphi, \psi) = \Delta\varphi\,\Delta\psi. \tag{13}$$

On rencontre ici, pour la première fois, un fait qui se présente fréquemment dans les théories analogues. Les invariants que nous avons introduits ne sont pas distincts, et l'on pourrait exprimer $\Theta(\varphi, \psi)$ en fonction de $\Delta\varphi$, $\Delta\psi$ et $\Delta(\varphi, \psi)$; mais l'expression ainsi obtenue serait irrationnelle, et l'on ne peut se dispenser de conserver Θ, sauf à tenir compte de la relation (13).

674. Nous allons maintenant définir le paramètre différentiel du second ordre. Pour cela, nous considérerons avec M. Beltrami l'intégrale double

$$\Omega = \int\!\!\int \Delta(\varphi, \psi)\, d\sigma = \int\!\!\int \Delta(\varphi, \psi)\, \mathrm{H}\, du\, dv,$$

étendue à une portion simplement connexe de la surface, limitée par un contour (C). Si l'on pose

$$\left\{\begin{aligned} \mathrm{M} &= \mathrm{H}\,\frac{\partial\,\Delta(\varphi, \psi)}{\partial\,\dfrac{\partial\psi}{\partial u}} = \frac{\mathrm{G}\,\dfrac{\partial\varphi}{\partial u} - \mathrm{F}\,\dfrac{\partial\varphi}{\partial v}}{\mathrm{H}},\\ \mathrm{N} &= \mathrm{H}\,\frac{\partial\,\Delta(\varphi, \psi)}{\partial\,\dfrac{\partial\psi}{\partial v}} = \frac{\mathrm{E}\,\dfrac{\partial\varphi}{\partial v} - \mathrm{F}\,\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}}{\mathrm{H}}, \end{aligned}\right. \tag{14}$$

l'intégrale deviendra

$$\int\!\!\int \left(\mathrm{M}\,\frac{\partial\psi}{\partial u} + \mathrm{N}\,\frac{\partial\psi}{\partial v}\right) du\, dv.$$

Écrivons-la sous la forme suivante

$$\Omega = \int\!\!\int \left[\frac{\partial(\mathrm{M}\psi)}{\partial u} + \frac{\partial(\mathrm{N}\psi)}{\partial v}\right] du\, dv - \int\!\!\int \psi \left(\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial u} + \frac{\partial \mathrm{N}}{\partial v}\right) du\, dv,$$

et appliquons la formule de Green à la première intégrale du second membre. Nous aurons évidemment

$$(15) \qquad \Omega = \int \psi(\mathrm{M}\, dv - \mathrm{N}\, du) - \int\!\!\int \psi \left(\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial u} + \frac{\partial \mathrm{N}}{\partial v}\right) du\, dv,$$

l'intégrale simple étant étendue au contour (C), parcouru dans un sens convenable.

Or, d'après la seconde formule (5) et d'après les valeurs de M et de N, on a évidemment

$$\mathrm{M}\, dv - \mathrm{N}\, du = - ds \cos(\omega - \omega')\sqrt{\Delta\varphi},$$

ω et ω' désignant les angles formés en chaque point avec l'axe des x du trièdre (T) par la tangente à la courbe $\varphi =$ const. et la tangente au contour limite (C). Introduisons à la place de ω' l'angle ω''

$$\omega'' = \omega' + \frac{\pi}{2},$$

qui détermine la direction de la normale au contour, dirigée vers l'intérieur de l'aire. On aura alors

$$\mathrm{M}\, dv - \mathrm{N}\, du = - ds \sin(\omega'' - \omega)\sqrt{\Delta\varphi}.$$

D'autre part, si l'on suppose que l'on parcoure un chemin infiniment petit δn dans la direction de cette normale, la formule (6) nous fera connaître la dérivée de φ relative à ce déplacement

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = \sin(\omega'' - \omega)\sqrt{\Delta\varphi}.$$

Nous aurons donc

$$\mathrm{M}\, dv - \mathrm{N}\, du = - \frac{\partial\varphi}{\partial n}\, ds.$$

La formule (15) prend alors la forme

$$(16) \quad \Omega = \int\!\!\int \Delta(\varphi, \psi)\, d\sigma = - \int \psi \frac{\partial\varphi}{\partial n}\, ds - \int\!\!\int \psi \left(\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial u} + \frac{\partial \mathrm{N}}{\partial v}\right) du\, dv$$

ou encore

$$\iint \psi \left(\frac{\partial M}{\partial u} + \frac{\partial N}{\partial v} \right) \frac{d\sigma}{H} = -\int \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} \, ds - \iint \Delta(\varphi, \psi) \, d\sigma;$$

et, par suite, l'intégrale double du premier membre, qui s'exprime en fonction de quantités absolument indépendantes du choix des axes, est un invariant. Il en sera évidemment de même de l'élément de cette intégrale; si donc nous posons

$$\Delta_2 \varphi = \frac{1}{H} \left(\frac{\partial M}{\partial u} + \frac{\partial N}{\partial v} \right)$$

ou, en développant les calculs,

$$(17) \qquad \Delta_2 \varphi = \frac{1}{H} \frac{\partial}{\partial u} \left\{ \frac{G \frac{\partial \varphi}{\partial u} - F \frac{\partial \varphi}{\partial v}}{H} \right\} + \frac{1}{H} \frac{\partial}{\partial v} \left\{ \frac{E \frac{\partial \varphi}{\partial v} - F \frac{\partial \varphi}{\partial u}}{H} \right\},$$

la fonction $\Delta_2 \varphi$ sera un invariant, linéaire par rapport aux dérivées de φ, et la formule (17) pourra s'écrire sous la forme abrégée

$$(18) \qquad \iint \Delta(\varphi, \psi) \, d\sigma = -\int \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} \, ds - \iint \psi \Delta_2 \varphi \, d\sigma.$$

Nous avons supposé que l'aire était limitée par un seul contour et que les dérivées de φ et ψ étaient continues à l'intérieur de ce contour. Si nous avions à considérer une aire limitée par plusieurs contours, il suffirait de remplacer l'intégrale simple qui figure dans la formule par la somme des intégrales analogues relatives à tous les contours. Si les conditions de continuité cessent d'être réalisées pour des points ou pour des lignes, on entourera les régions où se trouvent les discontinuités par des courbes que l'on joindra à celles qui limitent l'aire considérée. Nous n'insisterons pas sur toutes ces remarques qui ont déjà été présentées à propos du théorème de Green (n° 644).

675. Nos démonstrations supposent essentiellement le changement de variables réel; mais il est clair que les propriétés d'invariance subsistent même quand on emploie des coordonnées imaginaires. Il suffit, pour s'en rendre compte, de remarquer que les propositions établies sont susceptibles d'une vérification directe par le calcul algébrique, et il tombe sous le sens que cette véri-

lication est absolument indépendante de la réalité ou de l'imaginarité des variables ou des équations.

Une fois obtenus les deux invariants

$$\Delta\varphi, \quad \Delta_2\varphi,$$

on peut en déduire une foule d'autres

$$\Delta\Delta\varphi, \quad \Delta(\varphi, \Delta\varphi), \quad \Theta(\varphi, \Delta\varphi), \quad \ldots .$$

Les trois invariants nouveaux que nous venons d'écrire sont tous les trois du second ordre. En voici d'autres du troisième

$$\Delta\Delta\Delta\varphi, \quad \Delta\Delta(\varphi, \Delta\varphi), \quad \Delta\Theta(\varphi, \Delta\varphi), \quad \Delta_2\Delta\varphi, \quad \Delta\Delta_2\varphi, \quad \ldots .$$

Nous verrons plus loin que les formations précédentes donnent tous les invariants; mais nous reconnaîtrons encore, dans l'étude d'un problème important, qu'elles ne les donnent pas toujours sous la forme la plus simple.

676. Avant d'aborder les théories générales qui reposent sur l'emploi des paramètres différentiels, nous allons montrer comment ils peuvent intervenir utilement dans l'étude de quelques questions particulières.

Considérons d'abord une surface rapportée à un système de coordonnées rectangulaires. Si le carré de l'élément linéaire est pris sous la forme

$$ds^2 = A^2\, du^2 + C^2\, dv^2,$$

le rayon de courbure géodésique des courbes $v =$ const. est déterminé par la formule

$$\frac{1}{\rho} = -\frac{1}{AC}\frac{\partial A}{\partial v},$$

et il doit être porté, s'il est positif, du côté où v augmente. Or on a

$$\Delta v = \frac{1}{C^2}, \qquad \Delta(v, \Delta v) = -\frac{2}{C^5}\frac{\partial C}{\partial v},$$

$$\Delta_2 v = \frac{1}{AC}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{A}{C}\right) = -\frac{1}{C^3}\frac{\partial C}{\partial v} - \frac{1}{C\rho}$$

et, par conséquent,

$$\frac{1}{\rho} = -C\,\Delta_2 v - \frac{1}{C^2}\frac{\partial C}{\partial v}$$

ou, en remplaçant $\frac{\partial C}{\partial v}$ et C par leurs valeurs tirées des relations précédentes,

$$\frac{1}{\rho} = -\frac{\Delta_2 \varphi}{\sqrt{\Delta \varphi}} + \frac{1}{2} \frac{\Delta(\varphi, \Delta\varphi)}{(\Delta\varphi)^{\frac{3}{2}}}.$$

Cette formule, ne contenant plus que des invariants, sera applicable dans tous les cas. Par suite, le rayon de courbure géodésique d'une courbe représentée dans un système quelconque de coordonnées par l'équation

$$\varphi(u, v) = 0$$

sera donné par la formule

$$(19) \qquad \frac{1}{\rho} = -\frac{\Delta_2 \varphi}{\sqrt{\Delta \varphi}} + \frac{1}{2} \frac{\Delta(\varphi, \Delta\varphi)}{(\Delta\varphi)^{\frac{3}{2}}},$$

le sens positif du rayon étant celui pour lequel $d\varphi$ est positif [1].

On déduit de l'équation précédente que, si la famille de courbes (φ) est formée de lignes géodésiques, la fonction φ doit satisfaire à l'équation du second ordre

$$(20) \qquad \Delta(\varphi, \Delta\varphi) - 2\Delta\varphi\, \Delta_2 \varphi = 0.$$

Supposons maintenant que l'on donne deux fonctions φ, ψ et que l'on demande de calculer l'accroissement de ψ quand on parcourt un chemin infiniment petit sur la courbe

$$\varphi(u, v) = \text{const.}$$

Les différentielles du, dv relatives à ce déplacement ont été calculées plus haut ; on a trouvé

$$\frac{du}{ds} = \frac{1}{H\sqrt{\Delta\varphi}} \frac{\partial\varphi}{\partial v}, \qquad \frac{dv}{ds} = -\frac{1}{H\sqrt{\Delta}} \frac{\partial\varphi}{\partial u}.$$

Il viendra donc

$$\frac{\partial\psi}{\partial s_\varphi} = \frac{\partial\psi}{\partial u}\frac{du}{ds} + \frac{\partial\psi}{\partial v}\frac{dv}{ds} = \frac{\Theta(\psi, \varphi)}{\sqrt{\Delta\varphi}}.$$

[1] Beltrami, *Ricerche*, art. XXI, et *Mathematische Annalen*, t. I, p. 579.

Proposons-nous, par exemple, étant donnée une courbe (φ), de calculer la dérivée de la courbure géodésique par rapport à l'arc quand on se déplace sur cette courbe. On calculera ρ par la formule (19), et l'application de la formule précédente donnera ensuite

$$\frac{d\rho}{ds} = \frac{\Theta(\rho, \varphi)}{\sqrt{\Delta\varphi}}. \tag{21}$$

On calculerait de même les dérivées suivantes de ρ.

677. Soient maintenant φ et ψ deux fonctions distinctes. Supposons que l'on détermine un point de la surface par les valeurs de φ et de ψ, le carré de l'élément linéaire prendra la forme

$$ds^2 = E\,d\varphi^2 + 2F\,d\varphi\,d\psi + G\,d\psi^2.$$

Il est aisé de voir que l'on pourra exprimer E, F, G en fonction des invariants du premier ordre de φ et de ψ. En effet, si l'on calcule ces invariants, on aura les trois équations

$$\Delta\varphi = \frac{G}{EG - F^2}, \qquad \Delta\psi = \frac{E}{EG - F^2}, \qquad \Delta(\varphi, \psi) = \frac{-F}{EG - F^2},$$

qui peuvent être résolues par rapport à E, F, G, et nous donnent

$$\frac{1}{EG - F^2} = \Delta\varphi\,\Delta\psi - \Delta^2(\varphi, \psi),$$

$$E = \frac{\Delta\psi}{\Delta\varphi\,\Delta\psi - \Delta^2(\varphi, \psi)},$$

$$G = \frac{\Delta\varphi}{\Delta\varphi\,\Delta\psi - \Delta^2(\varphi, \psi)},$$

$$F = \frac{-\Delta(\varphi, \psi)}{\Delta\varphi\,\Delta\psi - \Delta^2(\varphi, \psi)}.$$

Le carré de l'élément linéaire aura donc pour expression

$$ds^2 = \frac{\Delta\psi\,d\varphi^2 - 2\Delta(\varphi, \psi)\,d\varphi\,d\psi + \Delta\varphi\,d\psi^2}{\Delta\varphi\,\Delta\psi - \Delta^2(\varphi, \psi)}; \tag{22}$$

le dénominateur, qui est $\Theta^2(\varphi, \psi)$, ne sera pas nul tant que les fonctions φ et ψ seront distinctes.

Cette expression de l'élément linéaire va nous permettre d'établir une proposition que nous avons annoncée plus haut et de

montrer que tout invariant composé avec les coefficients E, F, G et leurs dérivées, contenant d'ailleurs une ou plusieurs fonctions $\varphi, \psi, \ldots$ et leurs dérivées jusqu'à un ordre déterminé, peut être obtenu à l'aide des symboles Δ, Θ de M. Beltrami.

Soit, en effet,

$$I = \mathcal{F}\left(E, \frac{\partial E}{\partial u}, \ldots, \varphi, \frac{\partial \varphi}{\partial u}, \ldots\right)$$

une telle fonction. Les coefficients E, F, G, nous venons de le voir, s'expriment d'une manière simple au moyen des trois paramètres

$$\Delta u, \quad \Delta v, \quad \Delta(u, v).$$

D'ailleurs, si λ désigne une fonction quelconque, on a, d'après la définition même de l'invariant Θ,

$$\frac{\partial \lambda}{\partial u} = H\,\Theta(\lambda, v), \qquad \frac{\partial \lambda}{\partial v} = H\,\Theta(u, \lambda).$$

Il suit de là que toutes les dérivées, et par suite l'invariant I, peuvent s'exprimer au moyen des symboles Δ, Θ appliqués un nombre suffisant de fois aux fonctions

$$u, \quad v, \quad \varphi, \quad \psi, \quad \ldots.$$

Il suffit donc, pour démontrer immédiatement la proposition que nous avons en vue, de supposer que l'on a pris pour les variables u et v deux des fonctions $\varphi, \psi, \ldots$ qui entrent dans l'invariant.

S'il entre une seule fonction φ dans cet invariant, on pourra lui adjoindre et prendre pour ψ un de ses invariants, par exemple $\Delta\varphi$ ou $\Delta_2\varphi$. Tous les invariants d'une seule fonction peuvent donc être obtenus par l'emploi simultané et répété des opérations Δ et Δ_2, appliquées à cette seule fonction.

678. Parmi les questions dont la solution peut être rendue plus facile par l'emploi des invariants, on peut encore signaler la suivante.

Supposons qu'étant donnée une surface, on propose de mettre son élément linéaire sous la forme

$$(23) \qquad ds^2 = f(\alpha)\,dp^2 + 2\varphi(\alpha)\,dp\,dq + \psi(\alpha)\,dq^2,$$

où f, φ, ψ sont des fonctions données et connues de α, mais où α, p et q sont trois fonctions à déterminer. On reconnaîtra immédiatement que, si l'élément linéaire est donné sous la forme

$$ds^2 = \mathrm{E}\,du^2 + 2\mathrm{F}\,du\,dv + \mathrm{G}\,dv^2,$$

α, p et q doivent satisfaire aux trois équations simultanées

$$(24)\quad \left\{\begin{aligned} \mathrm{E} &= f(\alpha)\left(\frac{\partial p}{\partial u}\right)^2 + 2\varphi(\alpha)\frac{\partial p}{\partial u}\frac{\partial q}{\partial u} + \psi(\alpha)\left(\frac{\partial q}{\partial u}\right)^2, \\ \mathrm{F} &= f(\alpha)\frac{\partial p}{\partial u}\frac{\partial p}{\partial v} + \varphi(\alpha)\left(\frac{\partial p}{\partial u}\frac{\partial q}{\partial v} + \frac{\partial p}{\partial v}\frac{\partial q}{\partial u}\right) + \psi(\alpha)\frac{\partial q}{\partial u}\frac{\partial q}{\partial v}, \\ \mathrm{G} &= f(\alpha)\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)^2 + 2\varphi(\alpha)\frac{\partial p}{\partial v}\frac{\partial q}{\partial v} + \psi(\alpha)\left(\frac{\partial q}{\partial v}\right)^2, \end{aligned}\right.$$

dont l'intégration donnerait la solution complète du problème. La théorie des paramètres différentiels permet de former une équation du second ordre à laquelle satisfera l'une des inconnues p, q et qui remplacera le système précédent.

On a, en effet, en prenant l'élément linéaire sous la forme (23),

$$\Delta p = \frac{\psi(\alpha)}{f\psi - \varphi^2}$$

ou, si l'on désigne le second membre par $\chi(\alpha)$,

$$(25)\qquad \Delta p = \chi(\alpha).$$

Il vient ensuite, en regardant α comme exprimé en fonction de p et de q,

$$(26)\quad \left\{\begin{aligned} \Delta(p, \Delta p) &= \chi'(\alpha)\frac{\psi(\alpha)\dfrac{\partial \alpha}{\partial p} - \varphi(\alpha)\dfrac{\partial \alpha}{\partial q}}{f\psi - \varphi^2}, \\ \Theta(p, \Delta p) &= \frac{\chi'(\alpha)\dfrac{\partial \alpha}{\partial q}}{\sqrt{f\psi - \varphi^2}} \end{aligned}\right.$$

et enfin

$$(27)\qquad \Delta_2 p = \frac{1}{\sqrt{f\psi - \varphi^2}}\left[\frac{\partial}{\partial p}\frac{\psi}{\sqrt{f\psi - \varphi^2}} - \frac{\partial}{\partial q}\frac{\varphi}{\sqrt{f\psi - \varphi^2}}\right].$$

L'élimination de α, $\dfrac{\partial \alpha}{\partial p}$, $\dfrac{\partial \alpha}{\partial q}$ entre les quatre équations (25), (26) et (27) conduira à une relation entre les invariants de p, qui pourra ensuite être écrite avec des variables quelconques et sera pré-

cisément l'équation du second ordre cherchée. Le calcul se simplifie beaucoup si la fonction φ est nulle.

Comme première application, proposons-nous de ramener l'élément linéaire à la forme

$$ds^2 = \alpha(dp^2 + dq^2). \tag{28}$$

Nous trouverons immédiatement que p doit satisfaire à l'équation

$$\Delta_2 p = 0.$$

Nous reviendrons plus loin (n° 681) sur ce résultat.

Envisageons maintenant la forme suivante de l'élément linéaire

$$ds^2 = \cos^2\alpha\, dp^2 + \sin^2\alpha\, dq^2. \tag{29}$$

Elle correspond à une décomposition de la surface en rectangles infiniment petits dont les diagonales sont toutes égales ou, si l'on supprime les côtés de ces rectangles en laissant les diagonales, à une décomposition de la surface en losanges dont les côtés sont tous égaux. On a ici

$$\Delta p = \frac{1}{\cos^2\alpha}, \qquad \Delta(p, \Delta p) = \frac{2\sin\alpha}{\cos^5\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial p}, \qquad \Delta_2 p = \frac{1}{\sin\alpha\cos^3\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial p}$$

et, par suite,

$$\Delta(p, \Delta p) = 2\,\Delta_2 p(\Delta p - 1). \tag{30}$$

Telle est l'équation du second ordre dont dépendra la solution du problème. Remarquons que, si l'on effectue, dans la formule (29), la substitution linéaire

$$p = p' + q', \qquad q = p' - q',$$

on obtient la forme

$$ds^2 = dp'^2 + dq'^2 + 2\cos 2\alpha\, dp'\, dq', \tag{31}$$

identique à celle que nous avons rencontrée dans l'étude du problème de M. Tchebycheff [p. 132].

Nous étudierons enfin la forme suivante

$$ds^2 = \alpha\, dp^2 + \frac{1}{\alpha}\, dq^2, \tag{32}$$

qui se présente dans la théorie des Cartes géographiques. Si l'on

fait correspondre à chaque point de la surface le point du plan dont les coordonnées rectangulaires sont p et q, on aura une représentation plane de la surface dans laquelle les aires seront conservées et, de plus, on pourra former un système orthogonal avec les courbes de la surface qui correspondent aux droites du plan parallèles aux axes coordonnées. On peut encore caractériser la forme précédente de l'élément linéaire en disant que la surface peut être partagée par les lignes coordonnées en rectangles qui ont tous la même surface. On a ici

$$\Delta p = \frac{1}{\alpha}, \qquad \Delta(p, \Delta p) = -\frac{1}{\alpha^3}\frac{\partial \alpha}{\partial p}, \qquad \Delta_2 p = -\frac{1}{\alpha^2}\frac{\partial \alpha}{\partial p},$$

ce qui donne pour p l'équation

$$\Delta(p, \Delta p) = \Delta p\, \Delta_2 p. \tag{33}$$

Dans le cas des surfaces développables, cette équation se transforme aisément en une de celles que nous avons étudiées au Livre IV.

679. Nous indiquerons maintenant comment on calcule les invariants des fonctions les plus simples. Signalons tout d'abord les formules suivantes que le lecteur établira aisément

$$(34)\quad \left\{\begin{aligned}
&\Delta f(\alpha, \beta, \ldots) = \left(\frac{\partial f}{\partial \alpha}\right)^2 \Delta\alpha + \ldots + 2\frac{\partial f}{\partial \alpha}\frac{\partial f}{\partial \beta}\Delta(\alpha, \beta) + \ldots,\\
&\Theta(f, \varphi) = \left(\frac{\partial f}{\partial \alpha}\frac{\partial \varphi}{\partial \beta} - \frac{\partial f}{\partial \beta}\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}\right)\Theta(\alpha, \beta) + \ldots;\\
&\Delta(f, \varphi) = \frac{\partial f}{\partial \alpha}\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}\Delta\alpha + \ldots + \left(\frac{\partial f}{\partial \alpha}\frac{\partial \varphi}{\partial \beta} + \frac{\partial f}{\partial \beta}\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}\right)\Delta(\alpha, \beta) + \ldots,\\
&\Delta_2 f = \frac{\partial f}{\partial \alpha}\Delta_2\alpha + \ldots + \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2}\Delta\alpha + \ldots + 2\frac{\partial^2 f}{\partial \alpha\, \partial \beta}\Delta(\alpha, \beta) + \ldots;
\end{aligned}\right.$$

les termes non écrits se déduisant de ceux qui figurent dans les seconds membres par de simples permutations. Ces identités permettent de calculer les invariants des fonctions composées quand on connaît ceux des fonctions simples α, β, ...

Supposons la surface rapportée à ses lignes de courbure; désignons par x, y, z les coordonnées du point de la surface par rapport à des axes fixes et par a, a', a''; b, b', b''; c, c', c'' les neuf cosinus qui déterminent la position du trièdre (T) par rapport aux

axes. On aura, comme on sait,

$$(35)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{A}\dfrac{\partial x}{\partial u} = a, & \dfrac{1}{A}\dfrac{\partial y}{\partial u} = a', & \dfrac{1}{A}\dfrac{\partial z}{\partial u} = a''. \\[2ex] \dfrac{1}{C}\dfrac{\partial x}{\partial v} = b, & \dfrac{1}{C}\dfrac{\partial y}{\partial v} = b', & \dfrac{1}{C}\dfrac{\partial z}{\partial v} = b''; \end{cases}$$

$$(36)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial u} + R\dfrac{\partial c}{\partial u} = 0, & \dfrac{\partial y}{\partial u} + R\dfrac{\partial c'}{\partial u} = 0, & \dfrac{\partial z}{\partial u} + R\dfrac{\partial c''}{\partial u} = 0, \\[2ex] \dfrac{\partial x}{\partial v} + R'\dfrac{\partial c}{\partial v} = 0, & \dfrac{\partial y}{\partial v} + R'\dfrac{\partial c'}{\partial v} = 0, & \dfrac{\partial z}{\partial v} + R'\dfrac{\partial c''}{\partial v} = 0, \end{cases}$$

toutes les notations du Tableau V [II, p. 386] étant conservées. Ces formules permettent de calculer les valeurs suivantes des invariants :

$$(37)\quad \begin{cases} \Delta x = 1 - c^2, & \Delta c = \dfrac{a^2}{R^2} + \dfrac{b^2}{R'^2}, \\[2ex] \Delta(y, z) = -c'c'', & \Delta(c', c'') = \dfrac{a'a''}{R^2} + \dfrac{b'b''}{R'^2}, \\[2ex] \Theta(y, z) = c, & \Theta(c', c'') = \dfrac{c}{RR'}, \\[2ex] \Delta(x, c) = -\dfrac{a^2}{R} - \dfrac{b^2}{R'}, & \Theta(x, c) = ab\left(\dfrac{1}{R} - \dfrac{1}{R'}\right), \\[2ex] \Delta(x, c') = -\dfrac{aa'}{R} - \dfrac{bb'}{R'}, & \Theta(x, c') = \dfrac{ba'}{R} - \dfrac{ab'}{R'}. \end{cases}$$

Introduisons maintenant les distances de l'origine au plan tangent et aux plans principaux : si nous les désignons respectivement par P, Q, Q′, on aura

$$(38)\quad \begin{cases} P = cx + c'y + c''z, \\ Q = ax + a'y + a''z, \\ Q' = bx + b'y + b''z. \end{cases}$$

L'application des équations (34) et (37) nous donnera

$$(39)\quad \begin{cases} \Delta P = \dfrac{Q^2}{R^2} + \dfrac{Q'^2}{R'^2}, \\[2ex] \Delta(P, x) = -\dfrac{aQ}{R} - \dfrac{bQ'}{R'}, & \Delta(P, c) = \dfrac{aQ}{R^2} + \dfrac{bQ'}{R'^2}, \\[2ex] \Theta(P, x) = -\dfrac{bQ}{R} + \dfrac{aQ'}{R'}, & \Theta(P, c) = \dfrac{bQ - aQ'}{RR'}. \end{cases}$$

Dans ces formules figurent seulement les invariants du premier

ordre. Pour calculer les paramètres différentiels du second ordre, il faut se rappeler que les dérivées premières des neuf cosinus peuvent s'exprimer en fonction de ces cosinus et des rotations dont les valeurs ont été déjà données au Tableau V. On a, par exemple,

$$\begin{aligned}\Delta_2 x &= \frac{1}{AC}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{C}{A}\frac{\partial x}{\partial u}\right) + \frac{1}{AC}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{A}{C}\frac{\partial x}{\partial v}\right)\\ &= \frac{1}{AC}\frac{\partial}{\partial u}(Ca) + \frac{1}{AC}\frac{\partial}{\partial v}(Ab)\\ &= \frac{a}{AC}\frac{\partial C}{\partial u} + \frac{b}{AC}\frac{\partial A}{\partial v} + \frac{1}{A}(br - cq) + \frac{1}{C}(cp_1 - ar_1),\end{aligned}$$

ou, en remplaçant les rotations par leurs valeurs et faisant les réductions,

$$(40)\qquad \Delta_2 x = c\left(\frac{p_1}{C} - \frac{q}{A}\right) = c\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right).$$

Cette remarquable formule, signalée depuis longtemps par M. Beltrami, montre que, dans les surfaces minima, toutes les sections par des plans parallèles forment une famille isotherme (n° 209).

On trouvera de même

$$(41)\quad \left\{\begin{aligned}\Delta_2 c &= -a\frac{\partial}{A\,\partial u}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right) - b\frac{\partial}{C\,\partial v}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right) - c\left(\frac{1}{R^2} + \frac{1}{R'^2}\right),\\ \Delta_2 P &= -\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right) - P\left(\frac{1}{R^2} + \frac{1}{R'^2}\right)\\ &\quad - Q\frac{\partial}{A\,\partial u}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right) - Q'\frac{\partial}{C\,\partial v}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right).\end{aligned}\right.$$

Si l'on applique maintenant les formules générales (34), on obtiendra les deux relations

$$(42)\quad \left\{\begin{aligned}\Delta f(x,y,z) &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 - \left(c\frac{\partial f}{\partial x} + c'\frac{\partial f}{\partial y} + c''\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2,\\ \Delta_2 f(x,y,z) &= \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right)\left(c\frac{\partial f}{\partial x} + c'\frac{\partial f}{\partial y} + c''\frac{\partial f}{\partial z}\right)\\ &\quad + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} - \left(c\frac{\partial}{\partial x} + c'\frac{\partial}{\partial y} + c''\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 f.\end{aligned}\right.$$

Le carré qui figure dans la dernière est purement symbolique, c'est-à-dire qu'après l'avoir effectué, on devra remplacer les produits tels que $\frac{\partial}{\partial x} \times \frac{\partial}{\partial y}$ par une dérivée seconde $\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}$. Ces deux formules sont dues encore à M. Beltrami.

Si l'on prend

$$f = \omega = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{2},$$

on en déduit

$$(43) \qquad \begin{cases} \Delta\omega = 2\omega - P^2, \\ \Delta_2\omega = 2 + P\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right). \end{cases}$$

On trouvera encore

$$(44) \qquad \Delta(\omega, P) = -\frac{Q^2}{R} - \frac{Q'^2}{R'}.$$

680. Pour compléter cette étude rapide, il nous reste à montrer comment l'invariant linéaire du second ordre intervient, soit dans la théorie des systèmes isothermes et de la représentation conforme, soit dans l'examen d'une question très intéressante qui a été abordée pour la première fois par M. Beltrami (1), mais qui a été, dans ces derniers temps, l'objet d'études approfondies de la part de M. Klein (2).

Étant donné un plan, pour lequel le carré de l'élément linéaire est défini par la formule

$$ds^2 = dx^2 + dy^2,$$

on sait qu'une fonction d'une variable imaginaire est, par définition, celle dont la différentielle est le produit d'une fonction quelconque par l'un des facteurs linéaires de ds^2, c'est-à-dire celle pour laquelle on a

$$d\Omega = M(dx + i\,dy).$$

Étant donnée de même une surface quelconque réelle dont l'élément linéaire aura pour expression

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2,$$

u et v étant des variables réelles, nous décomposerons ds^2 en

(1) *Voir* le Mémoire, cité plus haut, des *Annali di Matematica*.

(2) KLEIN (F.), *Ueber Riemann's Theorie der algebraischen Functionen und ihrer Integrale*. Leipzig, 1882.

deux facteurs

$$ds^2 = \left[\sqrt{E}\,du + \frac{(F + iH)\,dv}{\sqrt{E}}\right]\left[\sqrt{E}\,du + \frac{(F - iH)\,dv}{\sqrt{E}}\right],$$

H désignant comme d'habitude le radical $\sqrt{EG - F^2}$. Une fonction *complexe* Ω du point (u, v) de la surface sera celle qui satisfera à l'équation

$$(45) \qquad d\Omega = M\left(\sqrt{E}\,du + \frac{F + iH}{\sqrt{E}}\,dv\right);$$

par conséquent, si l'on désigne par $\varkappa$ le facteur réel ou imaginaire qui fait de l'expression

$$\varkappa\left(\sqrt{E}\,du + \frac{F + iH}{\sqrt{E}}\,dv\right)$$

une différentielle exacte, et si l'on pose

$$(46) \qquad \varkappa\left(\sqrt{E}\,du + \frac{F + iH}{\sqrt{E}}\,dv\right) = dx + i\,dy,$$

on voit que Ω sera une fonction de la variable complexe $x + iy$. Si, dans l'équation précédente, on change i en $-i$ et si l'on désigne par $\varkappa'$ la fonction conjuguée de $\varkappa$, on aura

$$(47) \qquad \varkappa'\left(\sqrt{E}\,du + \frac{F - iH}{\sqrt{E}}\,dv\right) = dx - i\,dy,$$

et, en multipliant membre à membre les équations précédentes, on trouvera

$$(48) \qquad ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{\varkappa\varkappa'}.$$

Cette équation nous montre que x et y sont deux fonctions isothermes conjuguées. On le voit donc, dès que la surface est rapportée à un système isotherme, la définition d'une fonction complexe sur la surface devient identique à celle que l'on prend pour point de départ dans la représentation de la variable complexe sur le plan. En d'autres termes, dès que l'on connaît une représentation conforme de la surface sur le plan, les fonctions complexes du point de la surface sont identiques aux fonctions complexes du point correspondant dans le plan.

Réciproquement, supposons que l'on ait obtenu par un procédé quelconque une fonction Ω

$$\Omega = P + iQ$$

satisfaisant à l'équation (45). En changeant i en $-i$ dans cette équation et désignant par Ω' l'imaginaire conjuguée de Ω, on aura

$$(49) \qquad d\Omega' = M'\left(\sqrt{E}\,du + \frac{F - iH}{\sqrt{E}}\,dv\right)$$

et, par suite,

$$(50) \qquad d\Omega\,d\Omega' = MM'\,ds^2 = dP^2 + dQ^2.$$

Ainsi la connaissance d'une fonction complexe, d'ailleurs quelconque, permettra d'effectuer la représentation conforme de la surface sur le plan.

Il résulte immédiatement de la formule (50) que, si l'on connaît deux fonctions complexes sur deux surfaces différentes, on réalisera une représentation conforme des surfaces l'une sur l'autre en faisant correspondre les points pour lesquels les fonctions ont la même valeur; car, si l'on désigne par ds' l'élément linéaire de la seconde surface et par N, N' les quantités analogues à M, M', on aura, pour les éléments correspondants,

$$MM'\,ds^2 = NN'\,ds'^2 = d\Omega\,d\Omega',$$

ce qui démontre la proposition. Ce résultat, qui a été signalé particulièrement par M. Klein, comprend en particulier, ou plutôt présente sous une forme nouvelle ceux qui ont été déjà donnés (Livre II, Chap. III).

681. Il nous reste maintenant à mettre en évidence les rapports de la théorie précédente avec les invariants. Pour cela, nous allons chercher les équations qui définissent les fonctions complexes, quand le système de coordonnées est quelconque. L'équation (45) nous donne

$$\frac{\partial\Omega}{\partial u} = M\sqrt{E}, \qquad \frac{\partial\Omega}{\partial v} = M\frac{F + iH}{\sqrt{E}},$$

et l'élimination de M conduit à l'équation

$$(51) \qquad E\frac{\partial\Omega}{\partial v} - (F + iH)\frac{\partial\Omega}{\partial u} = 0,$$

qui caractérise les fonctions complexes. On peut encore l'écrire sous la forme équivalente

$$G\frac{\partial\Omega}{\partial u} - (F - iH)\frac{\partial\Omega}{\partial v} = 0. \tag{52}$$

Il résulte immédiatement de ces équations que la fonction Ω satisfait à l'équation

$$\Delta\Omega = 0. \tag{53}$$

Réciproquement, si une fonction Ω a son premier invariant nul, elle satisfait, soit à l'équation (51), soit à celle qu'on en déduit par le changement de signe de H; en d'autres termes, elle est fonction de l'une des variables déjà employées $x + iy$, $x - iy$.

On vérifiera également, par un calcul facile, que Ω satisfait à l'équation

$$\Delta_2\Omega = 0. \tag{54}$$

Étudions maintenant la relation entre la partie réelle P et la partie imaginaire Q de Ω.

L'équation (53) développée

$$0 = \Delta\Omega = \Delta P - \Delta Q + 2i\Delta(P, Q)$$

nous donne

$$\Delta P = \Delta Q, \qquad \Delta(P, Q) = 0.$$

Ces relations entre les invariants de P et de Q montrent que les courbes obtenues en égalant à des constantes la partie réelle et la partie imaginaire de Ω se coupent à angle droit. Ce résultat pouvait être prévu : il est une conséquence de l'équation (50). D'autre part, si, dans les équations (51) et (52), nous séparons les parties réelles et les parties imaginaires, nous obtiendrons les deux systèmes équivalents

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial u} &= \frac{F}{H}\frac{\partial P}{\partial u} - \frac{E}{H}\frac{\partial P}{\partial v}, \\ \frac{\partial Q}{\partial v} &= \frac{G}{H}\frac{\partial P}{\partial u} - \frac{F}{H}\frac{\partial P}{\partial v}, \end{aligned}\right. \tag{55}$$

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial u} &= \frac{E}{H}\frac{\partial Q}{\partial v} - \frac{F}{H}\frac{\partial Q}{\partial u}, \\ \frac{\partial P}{\partial v} &= \frac{F}{H}\frac{\partial Q}{\partial v} - \frac{G}{H}\frac{\partial Q}{\partial u}. \end{aligned}\right. \tag{56}$$

L'élimination de P entre les deux premières équations ou de Q entre les deux dernières nous montre que P et Q sont des solutions de l'équation

$$(57) \qquad \Delta_2 \theta = 0,$$

ce qui d'ailleurs résultait déjà de l'équation (54).

Réciproquement, toutes les fois que l'on connaîtra une solution quelconque $\theta = Q$ de l'équation (57), les formules (56) nous permettront de déterminer par une quadrature une fonction P, ce qui donnera une fonction complexe $\Omega = P + iQ$ du point sur la surface. On peut donc énoncer la proposition suivante : *La solution réelle la plus générale de l'équation* (57) *est fournie par la partie réelle ou par la partie imaginaire d'une fonction complexe du point sur la surface.* Par suite, si l'élément linéaire peut être ramené à la forme

$$ds^2 = \lambda(dx^2 + dy^2),$$

la solution la plus générale de l'équation (57) est

$$\theta = f(x + iy) + \psi(x - iy).$$

C'est d'ailleurs ce que l'on reconnaît immédiatement en profitant des propriétés d'invariance de l'équation (15) et l'écrivant avec les variables x, y ; car elle prend alors la forme simple

$$\frac{1}{\lambda}\left[\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2}\right] = 0.$$

682. M. Beltrami a montré comment on peut rattacher à sa théorie la proposition que nous devons à Gauss relativement à la courbure totale. Soient, conformément aux notations employées plus haut, $\varkappa$ et $\varkappa'$ deux facteurs qui fassent des expressions

$$\varkappa\left(\sqrt{E}\,du + \frac{F + iH}{\sqrt{E}}\,dv\right),$$

$$\varkappa'\left(\sqrt{E}\,du + \frac{F - iH}{\sqrt{E}}\,dv\right)$$

des différentielles exactes $d(x + iy)$ et $d(x - iy)$. Les facteurs

les plus généraux ayant la même propriété seront respectivement

$$\varkappa\,\varphi(x+iy),\quad \varkappa'\,\psi(x-iy),$$

φ et ψ désignant des fonctions quelconques; de sorte que si l'on veut ramener ds^2 à la forme

$$ds^2 = \lambda\, d\alpha\, d\beta,$$

la valeur la plus générale de λ sera

$$\lambda = \frac{1}{\varkappa\varkappa'\,\varphi(x+iy)\,\psi(x-iy)}.$$

Par conséquent, *pour tous les systèmes de coordonnées et pour toutes les valeurs possibles de $\varkappa$ et de $\varkappa'$, la fonction*

$$\Delta_2 \log\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = \Delta_2 \log\sqrt{\varkappa\varkappa'}$$

aura toujours la même valeur. Nous obtenons ainsi un *invariant* : on peut le calculer comme il suit.

La fonction $\varkappa$ doit satisfaire à l'équation

$$\frac{\partial(\varkappa\sqrt{E})}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial u}\,\frac{\varkappa(F+iH)}{\sqrt{E}},$$

qui donne

$$E\frac{\partial\log\varkappa}{\partial v} - F\frac{\partial\log\varkappa}{\partial u} = iH\frac{\partial\log\varkappa}{\partial u} + \sqrt{E}\,\frac{\partial}{\partial u}\,\frac{F+iH}{\sqrt{E}} - \frac{1}{2}\,\frac{\partial E}{\partial v}.$$

En multipliant par $\dfrac{F-iH}{E}$, on aura de même

$$F\frac{\partial\log\varkappa}{\partial v} - G\frac{\partial\log\varkappa}{\partial u} = iH\frac{\partial\log\varkappa}{\partial v} + \frac{F-iH}{\sqrt{E}}\,\frac{\partial}{\partial u}\,\frac{F+iH}{\sqrt{E}} - \frac{F-iH}{2E}\,\frac{\partial E}{\partial v}.$$

En se servant de ces deux relations pour calculer $\Delta_2\log\varkappa$, on obtient immédiatement ce résultat

$$\begin{aligned}\Delta_2\log\varkappa = {} & \frac{1}{H}\,\frac{\partial}{\partial u}\left(-i\frac{\partial\log\varkappa}{\partial v} + \frac{F-iH}{2EH}\,\frac{\partial E}{\partial v} - \frac{F-iH}{H\sqrt{E}}\,\frac{\partial}{\partial u}\,\frac{F+iH}{\sqrt{E}}\right)\\ & + \frac{1}{H}\,\frac{\partial}{\partial v}\left(i\frac{\partial\log\varkappa}{\partial u} + \frac{\sqrt{E}}{H}\,\frac{\partial}{\partial u}\,\frac{F+iH}{\sqrt{E}} - \frac{1}{2H}\,\frac{\partial E}{\partial v}\right),\end{aligned}$$

où $\varkappa$ s'élimine de lui-même. Si l'on change i en $-i$, $\varkappa$ en $\varkappa'$ et que l'on ajoute l'équation obtenue à la précédente, on trouve, en divisant par 2 et en réduisant,

$$(58)\quad \left\{\begin{aligned} \Delta_2 \log\sqrt{\varkappa\varkappa'} = {} & \frac{1}{2H}\frac{\partial}{\partial u}\left(-\frac{1}{H}\frac{\partial G}{\partial u} + \frac{F}{EH}\frac{\partial E}{\partial v}\right) \\ & + \frac{1}{2H}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{2}{H}\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{1}{H}\frac{\partial E}{\partial v} - \frac{F}{EH}\frac{\partial E}{\partial u}\right). \end{aligned}\right.$$

D'après la manière même dont nous l'avons obtenu, cet invariant doit s'annuler dans le cas où l'élément linéaire est réductible à la forme

$$ds^2 = dx^2 + dy^2,$$

et dans ce cas seulement. D'ailleurs, on reconnaîtra aisément, en le comparant à la formule (16) [II, p. 364], qu'il est identique à la *courbure totale.* Mais on peut aussi établir ce dernier résultat directement en le déduisant des propriétés mêmes d'invariance que nous avons signalées.

Supposons, en effet, que l'on veuille calculer la valeur de l'invariant pour un point M. Prenons pour axes des x et des y les tangentes principales en ce point. Si R et R' sont les rayons de courbure principaux en ce point, l'équation de la surface dans le voisinage de M sera

$$(59)\qquad z = \frac{x^2}{2R} + \frac{y^2}{2R'} + \cdots.$$

On aura, en choisissant x et y comme coordonnées curvilignes d'un point de la surface,

$$(60)\quad E = 1 + \frac{x^2}{R^2} + \ldots, \qquad F = \frac{xy}{RR'} + \ldots, \qquad G = 1 + \frac{y^2}{R'^2} + \ldots.$$

Si l'on porte ces valeurs de E, F, G dans la formule (58) et si l'on remarque que, pour $x = y = 0$, $\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}$ est la seule des dérivées premières et secondes de E, F, G qui ne soit pas nulle, on trouvera, pour le point M,

$$(61)\qquad \Delta_2 \log\sqrt{\varkappa\varkappa'} = \frac{1}{RR'}.$$

Tel est le résultat établi par M. Beltrami. Les considérations par lesquelles on le démontre ne diffèrent pas essentiellement de celles que M. O. Bonnet a développées dans le *Mémoire sur la théorie des surfaces applicables,* inséré au XLI^e Cahier du *Journal de l'École Polytechnique*.

CHAPITRE II.

SOLUTION D'UN PROBLÈME FONDAMENTAL : RECONNAITRE SI DEUX SURFACES SONT APPLICABLES L'UNE SUR L'AUTRE.

Deux surfaces pour lesquelles la courbure totale est constante et a la même valeur sont toujours applicables l'une sur l'autre; mais on ne sait réaliser cette application des deux surfaces l'une sur l'autre que dans le cas où la courbure totale est nulle. — Si l'on savait déterminer les géodésiques des deux surfaces, on pourrait réaliser l'application; mais la détermination de ces géodésiques dépend de l'intégration d'une équation de Riccati. — Méthode permettant de reconnaître si deux surfaces à courbure variable sont applicables l'une sur l'autre. — Cas général. — Emploi des paramètres différentiels. — Cas particulier où les courbes sur lesquelles la courbure totale conserve une même valeur sont parallèles les unes aux autres. — Cas plus spécial encore où ces courbes forment en outre une famille isotherme; les surfaces sont alors applicables sur des surfaces de révolution. — Étude de deux problèmes particuliers; recherche des surfaces réglées qui sont applicables sur des surfaces de révolution; recherche des surfaces gauches qui sont applicables sur une autre surface réglée sans que les génératrices rectilignes soient des courbes correspondantes sur les deux surfaces.

---

683. La théorie des paramètres différentiels permet de résoudre simplement la question suivante :

Reconnaître si deux surfaces sont applicables l'une sur l'autre ou si deux formes de l'élément linéaire sont équivalentes.

Voici la solution que nous donnerons de cette importante question.

Commençons par considérer le cas exceptionnel où la première surface (Σ) a une courbure constante; d'après le théorème de Gauss, la seconde surface (Σ') ne pourra être applicable sur la première que si elle a une courbure constante, égale à celle de la première. Supposons que cette condition, qui est nécessaire, soit remplie : nous allons montrer que les deux surfaces seront applicables l'une sur l'autre.

En effet, considérons, sur une surface à courbure constante $\frac{1}{a^2}$,

un système de coordonnées formé par les lignes géodésiques qui passent par un point fixe quelconque de la surface et leurs trajectoires orthogonales. Nous avons vu (n° 599) que l'on aura pour l'élément linéaire la forme réduite

$$ds^2 = a^2(du^2 + \sin^2 u\, dv^2). \tag{1}$$

Si, au contraire, la courbure est négative et égale à $-\frac{1}{a^2}$, on trouvera de même

$$ds^2 = a^2\left[du^2 + \left(\frac{e^u - e^{-u}}{2}\right)^2 dv^2\right]. \tag{2}$$

Enfin, si la courbure était nulle, on aurait, pour le même système de coordonnées,

$$ds^2 = du^2 + u^2\, dv^2. \tag{3}$$

Ces trois formes réduites nous permettent de résoudre complètement la question proposée. Étant données deux surfaces (Σ), (Σ'), de même courbure totale, nous allons démontrer qu'elles sont applicables l'une sur l'autre, et cela d'une infinité de manières.

Prenons un point quelconque M sur (Σ) et faisons-lui correspondre un point quelconque M' de (Σ'). Cela posé, à un point P de (Σ) ne peut correspondre sur (Σ') qu'un point P' dont la distance géodésique à M' égale la longueur de la ligne géodésique PM. Je prends un point quelconque P' satisfaisant à cette condition et je dis qu'on peut, de deux manières différentes, appliquer les deux surfaces l'une sur l'autre de telle sorte qu'à M et P correspondent respectivement M' et P'.

En effet, rapportons les deux surfaces aux systèmes de coordonnées polaires dont les pôles sont M et M'. En écrivant que les arcs correspondants sont égaux, on sera conduit à une équation

$$du^2 + \varphi^2(u)\, dv^2 = du'^2 + \varphi^2(u')\, dv'^2,$$

où $\varphi(u)$ désigne l'une des fonctions u, $\sin u$, $\frac{e^u - e^{-u}}{2}$ qui figurent dans les formules (1), (2), (3). Si M doit correspondre à M', on devra avoir aux points correspondants $u = u'$, et, par suite, l'équation précédente deviendra

$$dv^2 = dv'^2$$

ou, en intégrant,

$$v \pm v' = \text{const.}$$

Soient u_0, v_0 les coordonnées du point P; u'_0, v'_0 celles de P'. En écrivant que P et P' se correspondent, on détermine la valeur de la constante, et l'équation entre v et v' devient

$$v - v_0 = \pm (v' - v'_0).$$

Il y a deux solutions, correspondantes au double signe du second membre.

Considérons, par exemple, deux sphères égales et deux arcs de grand cercle égaux MP, M'P' pris respectivement sur ces deux surfaces. On peut amener les sphères à coïncider de manière que M', P' soient respectivement en M et P. Alors on peut établir la correspondance entre les deux surfaces, soit en regardant comme homologues les points de deux surfaces qui sont maintenant confondus, soit en faisant correspondre à l'un de ces points son symétrique par rapport à l'arc MP. Telle est ici l'interprétation géométrique des deux solutions précédentes.

684. Nous venons de démontrer que deux surfaces à courbures constantes et égales sont applicables l'une sur l'autre, et d'une infinité de manières; mais il ne résulte pas de là que l'on puisse toujours *réaliser* l'application et établir les équations qui relient les deux points correspondants. Pour être *effectivement* appliquée, la méthode que nous avons suivie exige évidemment que l'on connaisse les lignes géodésiques sur les deux surfaces données. Nous sommes donc conduits à nous proposer la question suivante :

Étant donnée une surface à courbure constante, peut-on déterminer ses lignes géodésiques?

Dans le cas où la courbure totale est nulle, la réponse à cette question n'est pas douteuse. Étant donné l'élément linéaire d'une surface développable, on peut toujours, par de simples quadratures, le ramener à la forme

$$dx^2 + dy^2.$$

Par suite, l'équation des géodésiques, qui est une relation

linéaire entre x et y, s'obtiendra dans tous les cas par de simples quadratures.

Soit, en effet,

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$$

un élément linéaire pour lequel la courbure totale, définie par la formule (58) du Chapitre précédent, est égale à zéro. Il résulte de la signification même de cet invariant et de la méthode que nous avons suivie au n° 682 que l'on pourra ramener l'élément linéaire précédent à la forme

$$ds^2 = dx^2 + dy^2; \tag{4}$$

et, par suite, il existera une fonction λ telle que les deux expressions

$$\left\{\begin{aligned} &\lambda\left(\sqrt{E}\,du + \frac{F + iH}{\sqrt{E}}\,dv\right), \\ &\frac{1}{\lambda}\left(\sqrt{E}\,du + \frac{F - iH}{\sqrt{E}}\,dv\right) \end{aligned}\right. \tag{5}$$

soient, l'une et l'autre, des différentielles exactes $d(x + iy)$ et $d(x - iy)$. Si nous écrivons les conditions d'intégrabilité, nous aurons les équations de condition

$$\frac{\partial}{\partial v}\lambda\sqrt{E} = \frac{\partial}{\partial u}\frac{F + iH}{\sqrt{E}}\lambda,$$

$$\frac{\partial}{\partial v}\frac{\sqrt{E}}{\lambda} = \frac{\partial}{\partial u}\frac{F - iH}{\lambda\sqrt{E}}.$$

Remplaçons dans ces équations λ par $e^{i\mu}$ et résolvons par rapport aux dérivées de μ; nous aurons

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial\mu}{\partial u} &= \frac{1}{H}\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{F}{2EH}\frac{\partial E}{\partial u} - \frac{1}{2H}\frac{\partial E}{\partial v}, \\ \frac{\partial\mu}{\partial v} &= \frac{1}{2H}\frac{\partial G}{\partial u} - \frac{F}{2EH}\frac{\partial E}{\partial v}. \end{aligned}\right. \tag{6}$$

Il suffit de se rappeler que la courbure totale est nulle et de comparer à l'équation (58) du Chapitre précédent pour reconnaître qu'il existe effectivement une fonction μ satisfaisant à ces deux équations. Cette fonction une fois déterminée par une quadrature,

on portera la valeur $e^{i\mu}$ de λ dans les expressions (5) et l'intégration de ces différentielles fera connaître $x+iy$ et $x-iy$. Il suffira donc de trois quadratures effectuées sur des différentielles à deux variables pour ramener l'élément linéaire à la forme (4) et, par suite, pour trouver les lignes géodésiques.

685. Passons aux surfaces à courbure constante et, pour fixer les idées, supposons que la courbure soit positive et égale à $\frac{1}{a^2}$ (pour une surface à courbure négative, il suffira de changer a en $a\sqrt{-1}$ dans les résultats que nous allons obtenir). Conservons toutes les notations du Livre V (Chap. I); il est clair que, la surface ou l'élément linéaire étant donné, si l'on détermine pour chaque point la position du trièdre (T) par rapport aux lignes coordonnées, on aura, en chaque point de la surface, les translations ξ, ξ_1, η, η_1 et, par suite, les rotations r et r_1 (n° 484). Ces six quantités ne changent pas lorsqu'on déforme la surface; par conséquent, si l'on veut l'appliquer sur une sphère (S) de rayon a, elles auront les mêmes valeurs aux points correspondants de (S) et de (Σ). Mais, pour le point de (S), les deux rayons de courbure principaux sont égaux à a et, de plus, les directions principales sont indéterminées. Il faut donc que les deux équations (10) [II, p. 352], qui définissent les directions principales, soient identiquement vérifiées quand on y fait $\rho = a$. On obtient ainsi les équations

$$\xi + aq = 0, \qquad \eta - ap = 0,$$
$$\xi_1 + aq_1 = 0; \qquad \eta_1 - ap_1 = 0,$$

qui déterminent p, q, p_1, q_1; de sorte que l'on connaît toutes les rotations et les translations du trièdre (T). La détermination effective du mouvement de ce trièdre et, par suite, l'application de la surface (Σ) sur la sphère (S) dépendent donc, d'après les principes exposés au Livre I, de l'intégration d'une équation de Riccati. Or, lorsque cette application des deux surfaces l'une sur l'autre sera effectuée, on connaîtra évidemment les lignes géodésiques de (Σ); elles correspondront aux grands cercles de (S). Ainsi :

La détermination des géodésiques d'une surface à courbure

totale constante et différente de zéro dépend de l'intégration d'une équation de Riccati.

686. Supposons maintenant que les deux surfaces (Σ), (Σ_1) soient, l'une et l'autre, à courbure variable; soient u, v les coordonnées qui déterminent un point de (Σ), u_1 v_1 celles qui déterminent un point de (Σ_1). Pour que les deux surfaces soient applicables l'une sur l'autre, il faudra que l'on puisse déterminer pour u et v des fonctions de u_1, v_1 donnant identiquement

$$E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2 = E_1\,du_1^2 + 2F_1\,du_1\,dv_1 + G_1\,dv_1^2,$$

et cette équation nous montre tout de suite que u et v doivent être des fonctions indépendantes; car, si u était fonction de v, le second membre serait un carré parfait.

L'application des méthodes générales conduirait pour u et v à trois équations aux dérivées partielles du premier ordre. Le problème posé, envisagé sous ce point de vue, consisterait donc à reconnaître si ces trois équations peuvent être vérifiées par un ou plusieurs systèmes de valeurs de u et de v.

Mais les propositions que nous avons établies précédemment vont nous permettre de reconnaître par de simples éliminations si les deux surfaces (Σ), (Σ_1) sont applicables l'une sur l'autre. Nous savons d'abord qu'aux points correspondants des deux surfaces les courbures totales doivent être égales. Si nous désignons, par conséquent, par $\varphi(u, v)$ et $\varphi_1(u_1, v_1)$ les expressions de la courbure totale, formées respectivement avec les éléments des surfaces (Σ), (Σ_1), nous devrons avoir l'équation

$$\varphi(u, v) = \varphi_1(u_1, v_1). \tag{7}$$

D'autre part, s'il existe une transformation de coordonnées permettant de passer de l'élément linéaire de la surface (Σ) à celui de la surface (Σ_1), tout invariant de la fonction φ, formé avec l'élément linéaire de (Σ), devra être égal à l'invariant correspondant de φ_1 formé avec l'élément linéaire de (Σ_1). Cette remarque nous permet de former une suite illimitée de relations entre u, v, u_1, v_1, qui seront toutes nécessaires.

Le principe suivant va nous aider à nous reconnaître au milieu

de toutes ces relations et d'écrire seulement celles qu'il est indispensable de considérer.

Soient

$$(8)\qquad \varphi(u, v) = \varphi_1(u_1, v_1), \qquad \psi(u, v) = \psi_1(u_1, v_1)$$

deux quelconques d'entre elles, que l'on choisira de manière à satisfaire à cette unique condition que les deux fonctions φ et ψ soient *indépendantes*. Alors il devra en être de même des fonctions φ_1 et ψ_1; sans cela, les surfaces ne pourraient être applicables l'une sur l'autre. Dans ces conditions, les équations précédentes, résolues par exemple par rapport à u et à v, définiront une ou plusieurs correspondances distinctes entre les points des deux surfaces (Σ), (Σ_1). Il est donc nécessaire, d'après la théorie même des invariants, que l'un au moins des systèmes ainsi obtenus de valeurs de u et de v vérifie les trois équations

$$(9)\qquad \Delta\varphi = \Delta^1\varphi_1, \qquad \Delta(\varphi, \psi) = \Delta^1(\varphi_1, \psi_1), \qquad \Delta\psi = \Delta^1(\psi_1),$$

où l'indice supérieur 1 indique les paramètres différentiels formés avec l'élément linéaire de (Σ_1). Mais nous allons montrer que, si la condition précédente est nécessaire, elle est aussi suffisante.

En effet, puisque les fonctions φ et ψ sont indépendantes, nous pouvons déterminer un point de la première surface par les valeurs qu'y prennent φ et ψ, et, d'après la formule donnée plus haut, l'élément linéaire de cette surface (Σ) aura pour expression

$$ds^2 = \frac{\Delta\psi\, d\varphi^2 - 2\,\Delta(\varphi, \psi)\, d\varphi\, d\psi + \Delta\varphi\, d\psi^2}{\Delta\varphi\,\Delta\psi - \Delta^2(\varphi, \psi)}.$$

De même, l'élément linéaire de (Σ_1) sera réductible à la forme

$$ds_1^2 = \frac{\Delta^1\psi_1\, d\varphi_1^2 - 2\,\Delta^1(\varphi_1, \psi_1)\, d\varphi_1\, d\psi_1 + \Delta^1\varphi_1\, d\psi_1^2}{\Delta^1\varphi_1\,\Delta^1\psi_1 - (\Delta^1(\varphi_1, \psi_1))^2},$$

et, par suite, la correspondance établie par les cinq équations (8) et (9) nous donnera

$$ds^2 = ds_1^2.$$

Notre proposition est donc établie ; elle permet, on va le voir, de résoudre simplement la question proposée.

687. Reprenons en effet l'équation (7), à laquelle nous adjoin-

drons la suivante

$$\Delta\varphi = \Delta^1\varphi_1.$$

Si $\Delta\varphi$ n'est pas une fonction de φ, $\Delta^1\varphi_1$ ne sera pas une fonction de φ_1 ; autrement les deux surfaces ne pourraient être applicables l'une sur l'autre ; $\Delta\varphi$ et $\Delta^1\varphi_1$ pourront donc jouer le rôle des fonctions que nous avons appelées plus haut ψ et ψ_1. Le système des équations (8) et (9) se réduira ici au suivant

$$(10) \qquad \begin{cases} \varphi = \varphi_1, \\ \Delta\varphi = \Delta^1\varphi_1, \\ \Delta(\varphi, \Delta\varphi) = \Delta^1(\varphi_1, \Delta^1\varphi_1), \\ \Delta\,\Delta\varphi = \Delta^1\,\Delta^1\varphi_1, \end{cases}$$

et il suffira que les deux dernières équations soient des conséquences des deux premières pour que les surfaces (Σ), (Σ_1) soient applicables l'une sur l'autre.

Notre raisonnement ne suppose en rien, on le voit, que φ soit la courbure totale et il s'appliquerait sans modification si l'on savait *a priori* que deux fonctions quelconques $\varphi(u, v)$, $\varphi_1(u_1, v_1)$ doivent prendre la même valeur aux points correspondants des deux surfaces. Le théorème de Gauss n'intervient dans cette analyse que pour nous faire connaître une fonction invariante. Le fait que cette fonction est la courbure ne joue qu'un rôle secondaire dans nos raisonnements; mais il n'en est plus ainsi, et la signification de φ reprend une grande importance, dans les cas particuliers que nous avons écartés et que nous allons maintenant examiner.

688. Supposons que, pour la surface (Σ), $\Delta\varphi$ soit une fonction de φ, $F(\varphi)$; il en sera de même pour l'autre, et l'on devra avoir évidemment

$$\Delta^1\varphi_1 = F(\varphi_1),$$

sans quoi les deux surfaces ne seraient pas applicables l'une sur l'autre. Nous supposerons cette première condition satisfaite. L'équation

$$\Delta\varphi = F(\varphi)$$

exprime que les lignes sur lesquelles la courbure totale est la même forment une famille de courbes parallèles. Nous avons

déjà rencontré au n° 671 les surfaces jouissant de cette propriété et nous avons même donné la forme de l'élément linéaire lorsqu'on prend un système de coordonnées formé de ces courbes parallèles et de leurs trajectoires orthogonales. Il nous suffira de remarquer ici que l'élément linéaire est de la forme bien connue

$$ds^2 = du^2 + C^2\,dv^2,$$

où l'on a (n° 672)

$$du = \frac{d\varphi}{\sqrt{\Delta\varphi}}. \tag{11}$$

On peut établir entre les invariants de la surface une relation qui nous sera utile. Si l'élément linéaire d'une surface est ramené à la forme

$$ds^2 = du^2 + C^2\,dv^2,$$

on a

$$\Delta u = 1, \qquad \Delta_2 u = \frac{1}{C}\frac{\partial C}{\partial u}, \qquad \varphi = \frac{1}{RR'} = -\frac{1}{C}\frac{\partial^2 C}{\partial u^2}$$

et de là on déduit

$$\Delta(u, \Delta_2 u) = -\varphi - (\Delta_2 u)^2. \tag{12}$$

Cette équation est tout à fait générale. Mais, si nous supposons maintenant que la surface soit une de celles que nous voulons étudier et que les courbes de paramètre u soient celles sur lesquelles la courbure φ demeure constante, $\Delta\varphi$ deviendra une fonction de φ; u sera aussi une fonction de φ, définie par l'équation (11), et la relation (12) se transformera dans la suivante

$$\Delta\left(\int\frac{d\varphi}{\sqrt{\Delta\varphi}},\ \Delta_2\int\frac{d\varphi}{\sqrt{\Delta\varphi}}\right) = -\varphi - \left(\Delta_2\int\frac{d\varphi}{\sqrt{\Delta\varphi}}\right)^2 \tag{13}$$

qui convient aux surfaces dont nous nous occupons et ne contient d'ailleurs qu'en apparence des intégrales et des radicaux.

Revenons aux deux surfaces (Σ), (Σ_1). Nous savons qu'aux points correspondants on doit avoir

$$\left\{\begin{aligned} \varphi(u, v) &= \varphi_1(u_1, v_1), \\ \Delta\varphi(u, v) &= \Delta_1\varphi_1(u_1, v_1); \end{aligned}\right. \tag{14}$$

mais ces deux relations, en vertu des hypothèses actuelles, se ramènent à une seule. Nous obtiendrons une équation nouvelle en

exprimant que les invariants du second ordre sont égaux, c'est-à-dire que l'on a

$$\Delta_2 \varphi = \Delta_2^1 \varphi_1.$$

Pour la simplicité des raisonnements, nous écrirons cette équation sous la forme équivalente

$$(15) \qquad \Delta_2 \int \frac{d\varphi}{\sqrt{\Delta\varphi}} = \Delta_2^1 \int \frac{d\varphi_1}{\sqrt{\Delta^1 \varphi_1}},$$

et nous lui adjoindrons la suivante

$$(16) \qquad \Theta\left(\varphi,\ \Delta_2 \int \frac{d\varphi}{\sqrt{\Delta\varphi}}\right) = \pm\, \Theta^1\left(\varphi_1,\ \Delta_2^1 \int \frac{d\varphi_1}{\sqrt{\Delta^1 \varphi_1}}\right).$$

Cela posé, si nous supposons que $\Delta_2 \int \frac{d\varphi}{\sqrt{\Delta\varphi}}$ ne soit pas une fonction de φ et que $\Delta_2^1 \int \frac{d\varphi_1}{\sqrt{\Delta^1 \varphi_1}}$ ne soit pas une fonction de φ_1, les deux équations (14) [qui se réduisent à une seule] et l'équation (15) définissent une ou plusieurs correspondances entre les points de deux surfaces. Si l'une de ces correspondances entraîne comme conséquence l'équation (16), les deux surfaces seront applicables l'une sur l'autre.

En effet, en vertu de l'identité (13), les équations (14) et (15) entraînent la suivante

$$\Delta\left(\varphi,\ \Delta_2 \int \frac{d\varphi}{\sqrt{\Delta\varphi}}\right) = \Delta^1\left(\varphi_1,\ \Delta_2^1 \int \frac{d\varphi_1}{\sqrt{\Delta^1 \varphi_1}}\right);$$

et enfin l'identité, démontrée au n° 673,

$$\Theta^2(\varphi,\ \Delta_2) + \Delta^2(\varphi,\ \Delta_2) = \Delta\varphi\, \Delta\Delta_2,$$

qui a lieu pour les deux surfaces, nous donnera de même

$$\Delta\Delta_2 \int \frac{d\varphi}{\sqrt{\Delta\varphi}} = \Delta^1 \Delta_2^1 \int \frac{d\varphi_1}{\sqrt{\Delta^1 \varphi_1}}.$$

La correspondance établie est donc telle que les deux fonctions φ, Δ_2 sont égales, ainsi que leurs trois invariants du premier ordre; par suite, les deux surfaces sont applicables l'une sur l'autre, en vertu du principe général que nous avons établi tout d'abord.

689. Il nous reste à examiner un dernier cas, c'est celui où, non seulement $\Delta\varphi$, mais $\Delta_2 \int \frac{d\varphi}{\sqrt{\Delta\varphi}}$ serait une fonction de φ. Comme on a

$$\Delta_2 \int \frac{d\varphi}{\sqrt{\Delta\varphi}} = \frac{\Delta_2\varphi}{\Delta\varphi} - \frac{1}{2\sqrt{\Delta\varphi}} \frac{\partial\Delta\varphi}{\partial\varphi},$$

il est clair que cela revient à supposer $\Delta_2\varphi$ fonction de φ.

Si ce cas exceptionnel se présente pour l'une des surfaces, il devra aussi se présenter pour l'autre, et l'expression de $\Delta_2\varphi$ en fonction de φ ne saurait être différente pour les deux surfaces. Nous allons montrer que ces conditions sont suffisantes : si, pour deux surfaces différentes, $\Delta_2\varphi$ et $\Delta\varphi$ sont des fonctions de φ et si les expressions de ces deux fonctions sont les mêmes, les deux surfaces sont applicables l'une sur l'autre *et d'une infinité de manières*.

Soit, en effet, (Σ) l'une des deux surfaces. En posant

$$u = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{\Delta\varphi}}$$

et rapportant la surface au même système de coordonnées que précédemment, on aura pour l'élément linéaire

$$ds^2 = du^2 + C^2 dv^2.$$

Si Ω désigne une fonction quelconque, l'expression générale de $\Delta_2\Omega$ devient ici

$$\Delta_2\Omega = \frac{1}{C}\frac{\partial}{\partial u}\left(C\frac{\partial\Omega}{\partial u}\right) + \frac{1}{C}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{C}\frac{\partial\Omega}{\partial v}\right).$$

En prenant donc $\Omega = \varphi$, on trouvera

$$\Delta_2\varphi = \frac{1}{C}\frac{\partial C}{\partial u}\frac{d\varphi}{du} + \frac{d}{du}\frac{d\varphi}{du}$$

ou, en tenant compte de la relation entre φ et u,

$$\Delta_2\varphi = \frac{1}{C}\frac{\partial C}{\partial u}\sqrt{\Delta\varphi} + \sqrt{\Delta\varphi}\frac{d}{d\varphi}(\sqrt{\Delta\varphi}),$$

ce qui donne

$$\frac{1}{C}\frac{\partial C}{\partial u} = \frac{\Delta_2\varphi - \frac{1}{2}\frac{d\Delta\varphi}{d\varphi}}{\sqrt{\Delta\varphi}}.$$

En intégrant et remplaçant du par $\frac{d\varphi}{\sqrt{\Delta\varphi}}$, on obtient la valeur suivante de C

$$C = Ve^{\int \frac{\Delta_2\varphi - \frac{1}{2}\frac{d\Delta\varphi}{d\varphi}}{\Delta\varphi} d\varphi} = \frac{V}{\sqrt{\Delta\varphi}} e^{\int \frac{\Delta_2\varphi}{\Delta\varphi} d\varphi},$$

où V désigne une fonction quelconque de v. Substituons cette valeur de C dans l'élément linéaire et remplaçons $V\,dv$ par dv, nous obtiendrons définitivement

$$(17) \qquad ds^2 = \frac{d\varphi^2}{\Delta\varphi} + \frac{e^{2\int \frac{\Delta_2\varphi}{\Delta\varphi} d\varphi}}{\Delta\varphi} dv^2.$$

Cette formule démontre immédiatement la proposition que nous avions en vue. Comme elle dépend exclusivement des expressions de $\Delta\varphi$, $\Delta_2\varphi$ en fonction de φ, elle sera évidemment la même pour les deux surfaces considérées, et l'application se trouvera réalisée par les formules

$$(18) \qquad \begin{cases} \varphi = \varphi_1, \\ v = \pm v_1 + \alpha, \end{cases}$$

α désignant une constante arbitraire. Les deux surfaces sont alors applicables l'une sur l'autre d'une infinité de manières, ce que l'on n'aura aucune peine à s'expliquer si l'on remarque que l'élément linéaire donné par la formule (17) est celui qui convient aux surfaces de révolution.

Pour établir la correspondance entre les deux surfaces, il suffira de ramener leur élément linéaire à la forme (17), et il est aisé de reconnaître que cette réduction exige une quadrature pour chaque surface. En effet, si l'on tire de l'équation (17) la valeur de dv, on trouvera

$$(19) \qquad dv = \pm\sqrt{\Delta\varphi\, ds^2 - d\varphi^2}\, e^{-\int \frac{\Delta_2\varphi}{\Delta\varphi} d\varphi},$$

et le second membre, ne contenant que des quantités connues ou des invariants, pourra être obtenu sans difficulté quelles que soient les coordonnées choisies; par conséquent, v sera donné par une quadrature.

690. La discussion que nous venons de terminer montre qu'il y a seulement deux classes de surfaces pour lesquelles l'application peut se faire d'une infinité de manières : ce sont les surfaces à courbure constante et les surfaces applicables sur les surfaces de révolution. Les unes et les autres sont évidemment applicables sur elles-mêmes d'une infinité de manières. L'analyse précédente montre d'ailleurs d'une manière évidente qu'elles sont les seules jouissant de cette propriété. Toutefois l'indétermination n'est pas la même dans les deux cas : pour les surfaces à courbure constante, le mouvement de déformation dans lequel la surface glisse sur elle-même peut amener un point quelconque en tout autre point de la surface; au contraire, dans le cas des surfaces à courbure variable applicables sur des surfaces de révolution, chaque point de la surface pourra seulement glisser le long de la courbe lieu des points pour lesquels la courbure totale demeure invariable.

Signalons cette conséquence que les surfaces hélicoïdes ou de révolution ne peuvent être applicables les unes sur les autres que si les hélices ou les parallèles sont des courbes correspondantes sur les surfaces que l'on considère. Par conséquent, les résultats des nos 73 à 79 nous donnent bien tous les hélicoïdes et toutes les surfaces de révolution qui correspondent à une forme donnée de l'élément linéaire [1].

691. Nous allons indiquer différentes applications de la méthode précédente. Cherchons d'abord s'il existe des surfaces réglées applicables sur des surfaces de révolution. Nous savons (n° 80) que l'élément linéaire d'une surface réglée rapportée à ses génératrices rectilignes et à leurs trajectoires orthogonales est de la forme

$$ds^2 = du^2 + (A u^2 + 2 B u + C)\, dv^2 = du^2 + g^2\, dv^2, \tag{20}$$

A, B, C étant des fonctions de v. On peut évidemment choisir la

---

[1] On consultera, sur le problème que nous venons de résoudre :

MINDING (F.), *Wie sich entscheiden lässt ob zwei gegebene Flächen auf einander abwickelbar sind oder nicht; nebst Bemerkungen über die Flächen mit unveränderlichen Krümmungsmaassen* (*Journal de Crelle*, t. XIX, 1839).

LIOUVILLE (J.), *Notes de la 5e édition de l'Application de l'Analyse à la Géométrie de* MONGE (Notes IV et V) ; 1850.

BONNET (O.), *Mémoire sur la théorie des surfaces applicables sur une surface donnée* (*Journal de l'École Polytechnique*, XLIe Cahier, 1863).

BERTRAND (J.), *Traité de Calcul différentiel et intégral*, t. I.

fonction v de telle manière que l'on ait

$$AC - B^2 = 1. \tag{21}$$

Le seul cas d'exception est celui où le coefficient de dv^2 est un carré parfait. Alors la surface est développable et la solution de la question posée devient évidente : toutes les surfaces développables sont applicables sur le cône de révolution.

En tenant compte de la relation (21), on aura

$$\frac{1}{RR'} = \frac{-1}{(Au^2 + 2Bu + C)^2} = \frac{-1}{g^4}. \tag{22}$$

Or on sait que, pour toutes les surfaces de révolution, les lignes sur lesquelles la courbure est constante sont parallèles les unes aux autres. Cette propriété, à la vérité, appartient encore à d'autres surfaces, mais elle nous suffira pleinement dans ce qui va suivre.

On devra donc avoir l'équation

$$\Delta(g^2) = f(g),$$

qui caractérise (n° 672) les familles de courbes parallèles et qui devient ici

$$4(Au + B)^2 + \frac{(A'u^2 + 2B'u + C')^2}{g^2} = f(g),$$

A', B', C' désignant les dérivées de A, B, C. Si nous remarquons qu'en vertu de la relation (21), on a

$$(Au + B)^2 = Ag^2 - 1,$$

on voit que nous pourrons donner à l'équation précédente la forme

$$(A'u^2 + 2B'u + C')^2 = f(g) - 4Ag^4.$$

Pour éliminer $f(g)$, nous allons différentier en supposant que g reste constante, ce qui donne la relation

$$\begin{aligned}&2(A'u^2 + 2B'u + C')(A'u + B')\,du \\ &\quad + [(A'u^2 + 2B'u + C')(A''u^2 + 2B''u + C'') + 2A'g^4]\,dv = 0.\end{aligned}$$

Mais, g devant demeurer constante, les rapports de du et de dv sont définis par l'équation

$$2g\,dg = 0 = 2(Au + B)\,du + (A'u^2 + 2B'u + C')\,dv,$$

qui donne

$$\frac{2\,du}{A'u^2+2B'u+C'} = \frac{-dv}{Au+B}.$$

On aura ainsi, en remplaçant dans l'équation précédente du, dv par les quantités qui leur sont proportionnelles,

$$(23)\quad \left\{\begin{aligned} &(A'u^2+2B'u+C')[(A'u+B')(A'u^2+2B'u+C') \\ &\qquad\qquad -(Au+B)(A''u^2+2B''u+C'')] \\ &\quad = 2A'(Au+B)(Au^2+2Bu+C)^2. \end{aligned}\right.$$

Cette relation doit avoir lieu identiquement. Si nous égalons les coefficients de la plus haute puissance de u dans les deux membres, nous trouvons

$$A'(A'^2-AA''-2A^3)=0.$$

Commençons par examiner l'hypothèse

$$A'=0, \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad A=\text{const.}$$

Alors la relation (23) prend la forme

$$(2B'u+C')[2B'^2u+B'C'-(Au+B)(2B''u+C'')]=0.$$

On peut vérifier cette équation soit en annulant le premier facteur, soit en annulant le second. Dans le premier cas, on a

$$B'=C'=0$$

et à cette solution correspond la forme suivante de l'élément linéaire

$$ds^2=du^2+(au^2+2bu+c)\,dv^2,$$

où a, b, c sont trois constantes quelconques.

Mais, si l'on suppose que le second facteur soit nul, on aura

$$AB''=0, \qquad B'^2-BB''-\frac{AC''}{2}=0, \qquad B'C'-BC''=0.$$

Il y a deux cas à distinguer suivant que A est nul ou différent de zéro :

1° Supposons $A=0$; nous aurons, en tenant compte de la relation (21),

$$B=i, \qquad C''=0, \qquad C=mv+n,$$

m et n désignant des constantes. On a donc

$$g^2 = 2iu + mv + n.$$

2° Soit maintenant $A \neq 0$; il vient

$$B'' = 0, \qquad B = mv + n,$$
$$C'' = \frac{2m^2}{A}, \qquad C = \frac{(mv+n)^2}{A} + \frac{1}{A}.$$

Donc

$$g^2 = A\left(u + \frac{mv+n}{A}\right)^2 + \frac{1}{A}.$$

692. Il nous reste maintenant à examiner les solutions de l'équation (23) pour lesquelles A' serait différent de zéro. Il est aisé de voir qu'il n'y en a *aucune*.

En effet, si A' n'est pas nul, le second membre de la relation (23) ne le sera pas non plus; par suite, il devra être divisible par le trinôme $A'u^2 + 2B'u + C'$. Il faudra donc que les deux équations

$$Au^2 + 2Bu + C = 0, \qquad A'u^2 + 2B'u + C' = 0$$

aient au moins une racine commune. On pourra donc égaler à zéro leur résultant, ce qui donnera la relation

$$(24) \qquad (AC' + CA' - 2BB')^2 - 4(B^2 - AC)(B'^2 - A'C') = 0.$$

Mais, si l'on différentie l'équation (21), on a

$$(25) \qquad AC' + CA' - 2BB' = 0,$$

de sorte que la condition précédente prend la forme simple

$$A'C' - B'^2 = 0.$$

Il faudra donc que $A'u^2 + 2B'u + C'$ soit un carré parfait; mais alors $Au + B$, devant, d'après l'équation (23), diviser

$$(A'u + B')(A'u^2 + 2B'u + C')^2,$$

admettra nécessairement la racine unique du trinôme

$$A'u^2 + 2B'u + C';$$

et, par suite, les deux équations

$$Au + B = 0, \qquad A'u^2 + 2B'u + C' = 0$$

devront avoir une racine commune. Or cela est impossible tant que A′ n'est pas nul; car l'élimination de u conduit à la condition

$$A'B^2 - 2B'AB + C'A^2 = 0,$$

d'où l'on peut faire disparaître B′ au moyen de l'équation (25), et l'on arrive ainsi à la relation

$$(B^2 - AC)A' = 0 \qquad \text{ou} \qquad A' = 0,$$

qui est en contradiction avec notre point de départ.

693. Donc les seules solutions de la question posée sont celles que nous avons indiquées en premier lieu et qui correspondent aux trois formes suivantes de l'élément linéaire

$$(26) \qquad \begin{cases} ds^2 = du^2 + (au^2 + 2bu + c)\,dv^2, \\ ds^2 = du^2 + \left[A(u + mv + n)^2 + \dfrac{1}{A}\right] dv^2, \\ ds^2 = du^2 + (2iu + mv + n)\,dv^2. \end{cases}$$

Ces formes peuvent elles-mêmes être simplifiées et, en distinguant tous les cas, on trouve les expressions réduites

$$(27) \qquad \begin{cases} ds^2 = du^2 + u\,dv^2, \\ ds^2 = du^2 + (u^2 + a^2)\,dv^2, \\ ds^2 = du^2 + [(u + av)^2 + b^2]\,dv^2, \\ ds^2 = du^2 + (u + av)\,dv^2. \end{cases}$$

La première correspond aux surfaces de révolution dont le méridien est défini par l'équation

$$z = \frac{1}{m}\int \sqrt{\rho^2 - m^2}\,d\rho,$$

ρ étant la distance à l'axe et z la distance à un plan perpendiculaire à l'axe. Elles sont engendrées par la révolution de la développée d'une chaînette autour de la *base* de cette courbe.

Parmi les surfaces de révolution en nombre infini (nº 76) qui correspondent aux autres expressions réduites (27) se trouvent l'alysséide pour la deuxième forme (nº 66), les ellipsoïdes et les hyperboloïdes de révolution pour la troisième, le paraboloïde de révolution pour la quatrième. Nous laisserons au lecteur le soin de vérifier tous ces résultats.

Quant aux surfaces réglées qui admettent les formes précédentes

de l'élément linéaire, on les déterminera par une méthode générale que nous ferons connaître plus loin. Nous nous contenterons, pour le moment, de remarquer que la première et la dernière des formes précédentes ne peuvent correspondre qu'à des surfaces dont les génératrices rectilignes sont imaginaires.

694. Proposons-nous maintenant de reconnaître s'il existe des surfaces gauches applicables sur des surfaces gauches sans que les génératrices rectilignes des deux surfaces se correspondent, ce qui revient à rechercher si l'on peut résoudre l'équation

$$(28) \quad du^2 + (au^2 + 2bu + c)\,dv^2 = du'^2 + (a_1 u'^2 + 2b_1 u' + c_1)\,dv'^2,$$

où a, b, c désignent des fonctions de v et a_1, b_1, c_1 des fonctions de v' sans supposer que v' soit une fonction de v.

Nous admettrons, comme précédemment, que l'on ait choisi v et v' de telle manière que l'on ait

$$(29) \qquad ac - b^2 = a_1 c_1 - b_1^2 = 1.$$

Alors l'équation relative à la courbure nous montre qu'aux points correspondants, on doit avoir

$$au^2 + 2bu + c = a_1 u'^2 + 2b_1 u' + c_1 = g^2,$$

et notre équation (28) devient

$$du^2 - du'^2 = g^2(dv'^2 - dv^2).$$

Elle admet une première solution

$$du = \pm\, du', \qquad dv = \pm\, dv'.$$

Mais alors les génératrices rectilignes se correspondent dans les deux surfaces. Cherchons donc d'autres solutions.

Écrivons l'équation sous la forme

$$g^2(dv + dv')(dv - dv') = (du + du')(du' - du).$$

Comme le signe de u' importe peu, on peut toujours supposer qu'il y a proportionnalité entre les deux premiers facteurs de chaque membre et poser, sans diminuer la généralité,

$$g(dv + dv') = \lambda(du + du'),$$

$$g(dv - dv') = \frac{-1}{\lambda}(du - du').$$

Introduisons les variables nouvelles

$$u + u' = 2\alpha, \qquad u - u' = 2\beta;$$

on aura

$$dv + dv' = \frac{2\lambda}{g}\,d\alpha, \qquad dv - dv' = \frac{-2}{g\lambda}\,d\beta.$$

Les seconds membres devant être des différentielles exactes, on pourra poser

$$\frac{\lambda}{g} = \frac{1}{A}, \qquad \frac{1}{g\lambda} = -\frac{1}{B},$$

A étant une fonction de α et B une fonction de β.

On déduit de là

$$(30)\quad \left\{\begin{aligned} &g^2 = -AB, \\ &du = d\alpha + d\beta, \qquad du' = d\alpha - d\beta, \\ &dv = \frac{d\alpha}{A} + \frac{d\beta}{B}, \qquad dv' = \frac{d\alpha}{A} - \frac{d\beta}{B} \end{aligned}\right.$$

et, par suite, en choisissant α et β comme variables indépendantes

$$(31)\qquad ds^2 = (A - B)\left(\frac{d\alpha^2}{A} - \frac{d\beta^2}{B}\right).$$

On retrouve ainsi, comme il fallait s'y attendre, la forme de l'élément linéaire considérée par M. Liouville.

Pour la commodité des calculs qui suivront, nous allons changer de notations. Posons

$$(32)\quad \left\{\begin{aligned} &A = \rho, \qquad B = \rho_1, \\ &\frac{d\alpha}{\sqrt{A}} = \frac{d\rho}{\sqrt{R}}, \qquad \frac{d\beta}{\sqrt{B}} = \frac{d\rho_1}{\sqrt{R_1}}, \end{aligned}\right.$$

R et R_1 étant des fonctions qui dépendent respectivement de ρ et de ρ_1. Il viendra

$$(33)\qquad g^2 = -\rho\rho_1,$$

$$(34)\quad \left\{\begin{aligned} &u = \int\sqrt{\frac{\rho}{R}}\,d\rho + \int\sqrt{\frac{\rho_1}{R_1}}\,d\rho_1, \qquad u' = \int\sqrt{\frac{\rho}{R}}\,d\rho - \int\sqrt{\frac{\rho_1}{R_1}}\,d\rho_1, \\ &v = \int\frac{d\rho}{\sqrt{\rho R}} + \int\frac{d\rho_1}{\sqrt{\rho_1 R_1}}, \qquad v' = \int\frac{d\rho}{\sqrt{\rho R}} - \int\frac{d\rho_1}{\sqrt{\rho_1 R_1}}, \end{aligned}\right.$$

$$(35)\qquad ds^2 = (\rho - \rho_1)\left(\frac{d\rho^2}{R} - \frac{d\rho_1^2}{R_1}\right),$$

et les fonctions inconnues devront être telles que l'on ait

$$-\rho\rho_1 = au^2 + 2bu + c = a_1 u'^2 + 2b_1 u' + c_1, \tag{36}$$

a, b, c et a_1, b_1, c_1 étant des fonctions de v et de v' assujetties à la condition de vérifier les relations (29).

695. On pourrait déterminer les fonctions R et R_1 par la condition que nous venons d'énoncer; mais il vaut mieux remarquer que la courbure totale de la surface, calculée avec la forme primitive (28) de l'élément linéaire, a pour expression

$$k = -\frac{1}{g^4} = -\frac{1}{(\rho\rho_1)^2}. \tag{37}$$

On peut aussi la calculer au moyen de la forme nouvelle (35) de l'élément linéaire, et l'on trouve alors, en appliquant par exemple la formule (8) [II, p. 385],

$$4k = 2\frac{R - R_1}{(\rho - \rho_1)^3} - \frac{R' + R'_1}{(\rho - \rho_1)^2}. \tag{38}$$

Si l'on égale les deux expressions de k, on aura l'équation fonctionnelle

$$2\frac{R - R_1}{(\rho - \rho_1)^3} - \frac{R' + R'_1}{(\rho - \rho_1)^2} = -\frac{4}{(\rho\rho_1)^2}, \tag{39}$$

qui suffira, nous allons le reconnaître, à la détermination des fonctions R et R_1; mais, au lieu de résoudre la question ainsi posée, nous la généraliserons un peu et nous rechercherons si la valeur de la courbure peut être une fonction quelconque du produit $\rho\rho_1$. Nous serons ainsi conduits à l'équation

$$2\frac{R - R_1}{(\rho - \rho_1)^3} - \frac{R' + R'_1}{(\rho - \rho_1)^2} = \mathcal{F}(\rho\rho_1), \tag{40}$$

qui comprend la précédente comme cas particulier. Pour la résoudre, nous allons la différentier totalement en supposant que le produit $\rho\rho_1$ demeure constant, c'est-à-dire que l'on a

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{d\rho_1}{\rho_1}.$$

On trouve ainsi, en différentiant l'équation (40) et en rem-

plaçant $d\rho$, $d\rho_1$ par ρ et $-\rho_1$ respectivement,

$$(41)\quad \left\{\begin{aligned} &-6(R-R_1)(\rho+\rho_1)+2R'(2\rho+\rho_1)(\rho-\rho_1)\\ &\quad+2R'_1(2\rho_1+\rho)(\rho-\rho_1)+(R''_1\rho_1-R''\rho)(\rho-\rho_1)^2=0.\end{aligned}\right.$$

Prenons la dérivée deux fois par rapport à ρ et deux fois par rapport à ρ_1 ; nous trouverons

$$\rho R^{\text{IV}}+4R'''=\rho_1 R_1^{\text{IV}}+4R_1'''.$$

Par suite les deux membres de cette égalité doivent avoir une même valeur constante, et, si nous remarquons que le premier est la dérivée quatrième de ρR, nous voyons que l'on doit avoir

$$\rho R=f(\rho),$$

f désignant un polynôme du quatrième degré à coefficients constants. L'équation de condition (41), où l'on fait $\rho=\rho_1$, montre immédiatement que l'on aura de même

$$\rho_1 R_1=f(\rho_1),$$

et elle est d'ailleurs vérifiée, on s'en assure aisément, sans qu'il soit nécessaire d'imposer aucune condition aux coefficients de $f(\rho)$.

696. Soit, en conséquence,

$$(42)\qquad f(\rho)=l+m\rho+n\rho^2+p\rho^3+q\rho^4.$$

En portant les valeurs de R et de R_1 dans l'expression de la courbure, on trouvera

$$(43)\qquad 4k=\frac{l}{(\rho\rho_1)^2}-q.$$

Il suffira donc, pour avoir la solution de la question proposée, de faire

$$q=0,$$

c'est-à-dire de prendre pour $f(\rho)$ un polynôme du troisième degré seulement. Mais alors l'élément linéaire prendra la forme

$$(44)\qquad ds^2=(\rho-\rho_1)\left[\frac{\rho\,d\rho^2}{f(\rho)}-\frac{\rho_1\,d\rho_1^2}{f(\rho_1)}\right],$$

qui convient aux surfaces du second degré (n° 504). De plus,

l'équation différentielle

$$\frac{d\rho}{\sqrt{f(\rho)}} = \pm \frac{d\rho_1}{\sqrt{f(\rho_1)}},$$

qui, d'après les formules (34), définit les deux familles de courbes

$$v = \text{const.}, \qquad v' = \text{const.},$$

est précisément celle des lignes asymptotiques, c'est-à-dire des génératrices rectilignes de la surface. Ainsi :

Toutes les fois que deux surfaces réglées sont applicables l'une sur l'autre sans que leurs génératrices coïncident, elles sont applicables sur une même surface du second degré de telle manière que leurs génératrices rectilignes correspondent respectivement aux deux systèmes de génératrices rectilignes de cette surface.

On peut, il est vrai, adresser une objection à l'analyse précédente. En prenant A et B pour variables indépendantes, nous avons exclu le cas où l'une de ces fonctions se réduirait à une constante. Mais l'examen de ce cas spécial n'offre aucune difficulté et n'infirme en rien la proposition précédente. Si A, par exemple, se réduit à une constante, la forme (31) de l'élément linéaire est celle qui convient aux surfaces de révolution. Les deux surfaces réglées qui sont applicables l'une sur l'autre auront donc leur élément linéaire défini par l'une des formules (27). Nous laissons au lecteur le soin d'examiner en détail ce cas particulier qui le conduira seulement aux surfaces applicables sur les surfaces de révolution du second degré.

697. Nous donnerons plus loin une démonstration nouvelle et plus simple de la proposition que nous venons d'établir et qui est due à M. O. Bonnet (¹). Si nous avons rapporté la précédente, c'est qu'elle conduit à un résultat qui nous paraît mériter d'être signalé. Nous avons vu que, si l'on prend pour R et R_1 les valeurs

---

(¹) On en trouvera deux démonstrations différentes dans le *Mémoire sur les surfaces applicables* de M. O. Bonnet (*Journal de l'École Polytechnique*, XLII^e Cahier, p. 44 et suiv.; 1867).

les plus générales

$$R = \frac{f(\rho)}{\rho}, \qquad R_1 = \frac{f(\rho_1)}{\rho_1}, \tag{45}$$

$f(\rho)$ étant le polynôme défini par l'équation (42), la courbure est une fonction de $\rho\rho_1$ donnée par l'équation (43). Si l'on prend les valeurs de u, v, u', v' définies par les équations (34), l'élément linéaire de la surface pourra être ramené à l'une des formes

$$\left.\begin{aligned} ds^2 &= du^2 + g^2\, dv^2 \\ ds^2 &= du'^2 + g^2\, dv'^2 \end{aligned}\right\} \quad \text{où} \quad g^2 = -\rho\rho_1.$$

D'après l'expression même de la courbure et la formule (43), la fonction g^2, exprimée en u et v, devra satisfaire à l'équation

$$-\frac{4}{g}\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} = \frac{l}{g^4} - q; \tag{46}$$

et de même, considérée comme dépendante de u' et de v', elle satisfera à l'équation

$$-\frac{4}{g}\frac{\partial^2 g}{\partial u'^2} = \frac{l}{g^4} - q. \tag{47}$$

L'équation (46), par exemple, s'intègre aisément et nous donne

$$g^2 = V \cos u\sqrt{-q} + V_1 \sin u\sqrt{-q} + V_2,$$

V, V_1, V_2 étant des fonctions de v assujetties à vérifier la relation

$$V^2 + V_1^2 - V_2^2 = -\frac{l}{q}.$$

On peut évidemment, en remplaçant v par une fonction de v, supprimer cette dernière condition, de sorte que l'on est conduit à considérer des surfaces dont l'élément linéaire est exprimé par la formule générale

$$ds^2 = du^2 + (V \cos au + V_1 \sin au + V_2)\, dv^2, \tag{48}$$

où a désigne une constante quelconque et V, V_1, V_2 des fonctions arbitraires de v.

Cette forme de l'élément linéaire, que nous rencontrons pour la première fois, comprend comme cas particulier celle qui con-

vient aux surfaces réglées. Il suffit, pour le reconnaître, de développer suivant les puissances de u et de faire tendre a vers zéro, en supposant que les trois premiers coefficients (de u^0, u, et u^2) demeurent des fonctions finies et déterminées de v.

Si l'on a, entre les fonctions V, la relation

$$V^2 + V_1^2 - V_2^2 = 0.$$

on retrouve l'élément linéaire d'une surface à courbure constante; car on peut exprimer l'élément linéaire comme il suit

$$ds^2 = du^2 + \left(V_3 \cos\frac{au}{2} + V_4 \sin\frac{au}{2}\right)^2 dv,$$

V_3 et V_4 désignant des fonctions de v. Ainsi, de même que les surfaces réglées peuvent se réduire aux surfaces développables, dont la courbure totale est nulle, les surfaces dont l'élément linéaire est défini par la formule (48) comprennent comme cas particulier celles dont la courbure totale est constante.

L'analogie se complète encore par la proposition que nous rencontrons ici : parmi ces surfaces nouvelles, il y en a une qui admet en quelque sorte un double mode de génération, c'est-à-dire dont l'élément linéaire est réductible de deux manières différentes à la forme (48). C'est celle dont l'élément linéaire, exprimé en fonction des variables ρ et ρ_1, est défini par l'équation (44) où l'on supposera que $f(\rho)$ désigne maintenant un polynôme du quatrième degré.

Il y aurait sans doute intérêt à trouver, en termes finis, les équations d'une ou de plusieurs surfaces admettant l'élément linéaire (48); mais nous aurons à revenir sur cette question, pour la considérer à un tout autre point de vue, dans l'étude de la géométrie non euclidienne.

CHAPITRE III.

LES FORMULES DE GAUSS.

Étude du commencement du Mémoire de Gauss. — Introduction des déterminants D, D′, D″. — Expression de DD″ — D′² en fonction des coefficients qui entrent dans l'élément linéaire et de leurs dérivées. — Relations différentielles entre D, D′, D″ et les coefficients de l'élément linéaire. — Rapprochement avec les formules de M. Codazzi. — Équations différentielles des lignes asymptotiques, des lignes de courbure, équation aux rayons de courbure principaux écrites au moyen des quantités D, D′, D″. — Équations aux dérivées partielles du second ordre auxquelles satisfont les coordonnées rectangulaires d'un point de la surface, lorsqu'on connaît D, D′, D″. — Équation aux dérivées partielles qui détermine les surfaces admettant un élément linéaire donné. — Les caractéristiques de cette équation sont les lignes asymptotiques de la surface.

---

698. Après avoir indiqué les méthodes qui permettent de reconnaître si deux surfaces données sont applicables l'une sur l'autre, nous allons étudier une question non moins importante, et nous nous proposerons de déterminer toutes les surfaces ayant un élément linéaire donné ou applicables sur une surface donnée. Cette question, mise au concours en 1859 par l'Académie des Sciences, a été l'objet de nombreux et importants travaux que nous avons déjà cités (¹). Il est curieux toutefois de remarquer qu'une étude attentive du Mémoire de Gauss devait conduire presque immédiatement et sans effort à l'équation aux dérivées partielles du second ordre des surfaces applicables sur une surface donnée. Nous allons étudier avec les détails nécessaires la belle

---

(¹) Bour (E.), *Théorie de la déformation des surfaces* (*Journal de l'École Polytechnique*, XXXIXe Cahier, 1862).

Bonnet (O.), *Mémoire sur la théorie des surfaces applicables sur une surface donnée* (*Journal de l'École Polytechnique*, XLIe et XLIIe Cahier, 1865).

Codazzi (D.), *Mémoire relatif à l'application des surfaces les unes sur les autres, envoyé au Concours ouvert sur cette question, en* 1859, *par l'Académie des Sciences*, déjà cité et analysé [II, p. 369].

méthode de Gauss; il nous suffira d'ajouter quelques relations nouvelles pour obtenir un ensemble tout à fait équivalent aux formules de M. Codazzi.

Considérons la surface dont l'élément linéaire est défini par la relation

$$ds^2 = \mathrm{E}\, du^2 + 2\mathrm{F}\, du\, dv + \mathrm{G}\, dv^2. \tag{1}$$

A l'exemple de Lamé, désignons par le signe S une somme étendue à trois termes jouant le même rôle par rapport aux trois axes coordonnés. Si x, y, z sont les coordonnées rectangulaires du point (u, v) de la surface, nous aurons

$$\mathrm{S}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 = \mathrm{E}, \qquad \mathrm{S}\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} = \mathrm{F}, \qquad \mathrm{S}\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 = \mathrm{G}, \tag{2}$$

et ces trois équations définissent complètement les relations qui existent entre les coordonnées rectangulaires et les coordonnées curvilignes d'un point quelconque de la surface.

Introduisons les cosinus directeurs de la normale en ce point. Si l'on pose, pour abréger,

$$\mathrm{H} = \sqrt{\mathrm{EG} - \mathrm{F}^2}, \tag{3}$$

on aura, en désignant par c, c', c'' ces cosinus,

$$c = \frac{1}{\mathrm{H}}\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}, \qquad c' = \frac{1}{\mathrm{H}}\frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}, \qquad c'' = \frac{1}{\mathrm{H}}\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}, \tag{4}$$

et aussi

$$\mathrm{S}\, c\frac{\partial x}{\partial u} = 0, \qquad \mathrm{S}\, c\frac{\partial x}{\partial v} = 0. \tag{5}$$

En différentiant successivement ces deux dernières relations, on trouve

$$\mathrm{S}\frac{\partial c}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial u} = -\mathrm{S}\, c\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}, \qquad \mathrm{S}\frac{\partial c}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u} = -\mathrm{S}\, c\frac{\partial^2 x}{\partial u\, \partial v},$$
$$\mathrm{S}\frac{\partial c}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} = -\mathrm{S}\, c\frac{\partial^2 x}{\partial u\, \partial v}, \qquad \mathrm{S}\frac{\partial c}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial v} = -\mathrm{S}\, c\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}.$$

Remplaçons dans les seconds membres c, c', c'' par leurs valeurs

tirées des formules (4) et posons, pour abréger,

$$(6)\quad D = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad D' = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} & \frac{\partial^2 y}{\partial u\,\partial v} & \frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad D'' = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial v^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

Nous pourrons écrire

$$(7)\quad \left\{ \begin{aligned} & \mathbf{S} \frac{\partial c}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial u} = -\frac{D}{H}, \qquad \mathbf{S} \frac{\partial c}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial v} = -\frac{D''}{H}, \\ & \mathbf{S} \frac{\partial c}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} = \mathbf{S} \frac{\partial c}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial u} = -\frac{D'}{H}. \end{aligned} \right.$$

Ces relations vont nous permettre de déterminer les dérivées premières de c, c', c'' en fonction des dérivées premières de x, y, z et de D, D′, D″.

Remarquons d'abord qu'en tenant compte de l'identité

$$c \frac{\partial c}{\partial u} + c' \frac{\partial c'}{\partial u} + c'' \frac{\partial c''}{\partial u} = 0,$$

on peut poser

$$(8)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial c}{\partial u} &= m \frac{\partial x}{\partial u} + n \frac{\partial x}{\partial v}, \\ \frac{\partial c'}{\partial u} &= m \frac{\partial y}{\partial u} + n \frac{\partial y}{\partial v}, \\ \frac{\partial c''}{\partial u} &= m \frac{\partial z}{\partial u} + n \frac{\partial z}{\partial v}, \end{aligned} \right.$$

m et n étant deux coefficients à déterminer. On pourra de même, en introduisant deux inconnues nouvelles, écrire

$$(9)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial c}{\partial v} &= m' \frac{\partial x}{\partial u} + n' \frac{\partial x}{\partial v}, \\ \frac{\partial c'}{\partial v} &= m' \frac{\partial y}{\partial x} + n' \frac{\partial y}{\partial v}, \\ \frac{\partial c''}{\partial v} &= m' \frac{\partial z}{\partial u} + n' \frac{\partial z}{\partial v}. \end{aligned} \right.$$

Si l'on substitue ces valeurs des dérivées de c, c', c'' dans les

équations (7), on trouve les relations

$$
(10)\qquad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{D}{H} + mE + nF = 0, &\qquad &\frac{D'}{H} + mF + nG = 0,\\
&\frac{D'}{H} + m'E + n'F = 0, &\qquad &\frac{D''}{H} + m'F + n'G = 0,
\end{aligned}
\right.
$$

qui feront connaître m, n, m', n'. On obtient ainsi les valeurs

$$
(11)\qquad \left\{
\begin{aligned}
&m = \frac{FD' - GD}{H^3}, &\qquad &n = \frac{FD - ED'}{H^3},\\
&m' = \frac{FD'' - GD'}{H^3}, &\qquad &n' = \frac{FD' - ED''}{H^3},
\end{aligned}
\right.
$$

entre lesquelles existent les relations

$$
(12)\qquad m'E + (n' - m)F - nG = 0,
$$

$$
(13)\qquad mn' - nm' = \frac{DD'' - D'^2}{H^4},
$$

dont nous aurons à faire usage. L'expression $DD'' - D'^2$ joue un rôle très important. Gauss a montré qu'on peut l'exprimer exclusivement au moyen des dérivées de E, F, G. Il suffit pour cela de s'appuyer sur les identités suivantes.

699. En différentiant les équations (2), on a évidemment

$$
(14)\qquad \left\{
\begin{aligned}
&S\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial u}, &\qquad &S\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} = \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v},\\
&S\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} = \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u}, &\qquad &S\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial v}.
\end{aligned}
\right.
$$

Différentions par rapport à u la seconde des formules (2) et retranchons-en la dérivée de la première par rapport à v; nous trouverons ainsi

$$
(15)\qquad S\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v}.
$$

On démontrera par un procédé analogue la relation

$$
(16)\qquad S\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = \frac{\partial F}{\partial v} - \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u}.
$$

Enfin, si l'on différentie l'équation (15) par rapport à v et que l'on en retranche la dérivée par rapport à u de la troisième équa-

tion (14), on obtiendra

$$(17)\qquad \mathbf{S}\left\{\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}-\left(\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}\right)^2\right\}=\frac{\partial^2 F}{\partial u\,\partial v}-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 E}{\partial v^2}-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial u^2};$$

nous poserons, pour abréger,

$$(18)\qquad L=\frac{\partial^2 F}{\partial u\,\partial v}-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 E}{\partial v^2}-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial u^2}.$$

La multiplication des déterminants D, D″ nous donnera

$$DD''=\begin{vmatrix} \mathbf{S}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} & \mathbf{S}\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} & \mathbf{S}\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}\\ \mathbf{S}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\frac{\partial x}{\partial u} & \mathbf{S}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 & \mathbf{S}\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}\\ \mathbf{S}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\frac{\partial x}{\partial v} & \mathbf{S}\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} & \mathbf{S}\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 \end{vmatrix}$$

ou, en tenant compte des formules (2), (14), (15),

$$(19)\qquad DD''=\begin{vmatrix} \mathbf{S}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} & \frac{\partial F}{\partial v}-\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u} & \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial v}\\ \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial u} & E & F\\ \frac{\partial F}{\partial u}-\frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v} & F & G \end{vmatrix}.$$

Par un calcul analogue, on trouvera

$$(20)\qquad D'^2=\begin{vmatrix} \mathbf{S}\left(\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}\right)^2 & \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v} & \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u}\\ \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v} & E & F\\ \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u} & F & G \end{vmatrix},$$

et, par conséquent, si l'on remarque que, dans les deux déterminants, les deux termes $\mathbf{S}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}$ et $\mathbf{S}\left(\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}\right)^2$ ont le même multiplicateur, et si l'on tient compte des formules (17), (18), on obtiendra la formule définitive

$$(21)\qquad DD''-D'^2=\begin{vmatrix} L & \frac{\partial F}{\partial v}-\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u} & \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial v}\\ \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial u} & E & F\\ \frac{\partial F}{\partial u}-\frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v} & F & G \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v} & \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u}\\ \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v} & E & F\\ \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u} & F & G \end{vmatrix}.$$

Ainsi se trouve établi le résultat important que nous avions annoncé; le second membre ne contient absolument que les coefficients qui figurent dans l'élément linéaire et leurs dérivées.

700. Les relations précédentes constituent tout ce que l'on doit à Gauss dans cette partie de la théorie. Celles que nous allons ajouter et qui s'en déduisent immédiatement tiennent lieu des formules de M. Codazzi.

Différentions la première des équations (8) par rapport à v, la première des équations (9) par rapport à u et égalons les deux valeurs de $\frac{\partial^2 c}{\partial u\,\partial v}$ que l'on obtient de cette manière. Nous aurons

$$(22)\quad \left\{\begin{aligned} &(m-n')\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}+n\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}-m'\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\\ &\qquad+\frac{\partial x}{\partial u}\left(\frac{\partial m}{\partial v}-\frac{\partial m'}{\partial u}\right)+\frac{\partial x}{\partial v}\left(\frac{\partial n}{\partial v}-\frac{\partial n'}{\partial u}\right)=0.\end{aligned}\right.$$

Cette équation est encore vérifiée quand on y remplace x par y et par z. Ajoutons les trois équations ainsi obtenues après les avoir multipliées respectivement d'abord par $\frac{\partial x}{\partial u}$, $\frac{\partial y}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial u}$, ensuite par $\frac{\partial x}{\partial v}$, $\frac{\partial y}{\partial v}$, $\frac{\partial z}{\partial v}$; nous aurons, en tenant compte des formules (2), (14), (15) et (16),

$$(23)\quad \left\{\begin{aligned} &0=\frac{m-n'}{2}\frac{\partial E}{\partial v}+n\left(\frac{\partial F}{\partial v}-\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u}\right)-\frac{m'}{2}\frac{\partial E}{\partial u}\\ &\qquad+E\left(\frac{\partial m}{\partial v}-\frac{\partial m'}{\partial u}\right)+F\left(\frac{\partial n}{\partial v}-\frac{\partial n'}{\partial u}\right)=0,\\ &0=\frac{m-n'}{2}\frac{\partial G}{\partial u}+\frac{n}{2}\frac{\partial G}{\partial v}-m'\left(\frac{\partial F}{\partial u}-\frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v}\right)\\ &\qquad+F\left(\frac{\partial m}{\partial v}-\frac{\partial m'}{\partial u}\right)+G\left(\frac{\partial n}{\partial v}-\frac{\partial n'}{\partial u}\right)=0.\end{aligned}\right.$$

Si l'on rapproche ces deux formules des équations (12) et (13) et si l'on remarque que $DD''-D'^2$ dépend seulement des coefficients de l'élément linéaire et de leurs dérivées, on aura constitué un système de quatre équations qui serviront à déterminer les inconnues m, n, m', n' quand l'élément linéaire sera seul connu.

Ce système peut être remplacé par le suivant. Substituons aux quantités m, n, m', n' leurs expressions en fonction de D, D', D''

données par les formules (11). Après un calcul facile, qui peut même être beaucoup abrégé si l'on tient compte des relations (10), on obtient, à la place des deux équations (23), les suivantes :

$$(24)\quad \left\{\begin{aligned} &H^2\left(\frac{\partial D'}{\partial u}-\frac{\partial D}{\partial v}\right)+D\left(\frac{1}{2}E\frac{\partial G}{\partial v}+G\frac{\partial E}{\partial v}-F\frac{\partial F}{\partial v}-\frac{1}{2}F\frac{\partial G}{\partial u}\right)\\ &\qquad+D'\left(-F\frac{\partial E}{\partial v}+2F\frac{\partial F}{\partial u}-G\frac{\partial E}{\partial u}\right)\\ &\qquad+D''\left(\frac{1}{2}E\frac{\partial E}{\partial v}-E\frac{\partial F}{\partial u}+\frac{1}{2}F\frac{\partial E}{\partial u}\right)=0,\end{aligned}\right.$$

$$(25)\quad \left\{\begin{aligned} &H^2\left(\frac{\partial D'}{\partial v}-\frac{\partial D''}{\partial u}\right)+D\left(\frac{1}{2}G\frac{\partial G}{\partial u}-G\frac{\partial F}{\partial v}+\frac{1}{2}F\frac{\partial G}{\partial v}\right)\\ &\qquad+D'\left(-F\frac{\partial G}{\partial u}+2F\frac{\partial F}{\partial v}-E\frac{\partial G}{\partial v}\right)\\ &\qquad+D''\left(\frac{1}{2}G\frac{\partial E}{\partial u}+E\frac{\partial G}{\partial u}-F\frac{\partial F}{\partial u}-\frac{1}{2}F\frac{\partial E}{\partial v}\right)=0.\end{aligned}\right.$$

Ces deux équations aux dérivées partielles, jointes à la relation (21), serviront à la détermination de D, D′, D″ quand on connaîtra les coefficients E, F, G de l'élément linéaire.

Si nous nous reportons au n° 503 [II, p. 378], nous reconnaîtrons aisément que le système précédent, formé par les équations (21), (24) et (25), est tout à fait l'équivalent des formules données par M. Codazzi. Il résulte, en effet, des formules (44) [II, p. 379] que les rotations du trièdre (T) peuvent s'exprimer linéairement en fonction des trois déterminants D, D′, D″. Une transformation très simple rattache donc le système précédent à celui que nous avons développé dans les premiers Chapitres du Livre V.

701. La remarque précédente permet de prévoir que l'on pourra obtenir tous les éléments relatifs à la courbure en introduisant seulement les quantités D, D′, D″. Cherchons d'abord les lignes asymptotiques. L'identité

$$dc\,dx+dc'\,dy+dc''\,dz=-c\,d^2x-c'\,d^2y-c''\,d^2z$$

nous donnera, à l'aide des formules (8) et (9),

$$(26)\qquad \mathbf{S}\,dc\,dx=-\frac{1}{H}(D\,du^2+2D'\,du\,dv+D''\,dv^2);$$

et, par conséquent, l'équation cherchée sera

$$D\,du^2 + 2D'\,du\,dv + D''\,dv^2 = 0. \tag{27}$$

Considérons maintenant les lignes de courbure et employons les équations d'Olinde Rodrigues

$$dx + R\,dc = 0, \qquad dy + R\,dc' = 0, \qquad dz + R\,dc'' = 0.$$

Si on les ajoute, après les avoir multipliées successivement par $\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}$ et par $\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}$, on obtient le système suivant :

$$\left\{\begin{aligned} &E\,du + F\,dv - \frac{R}{H}(D\,du + D'\,dv) = 0,\\ &F\,du + G\,dv - \frac{R}{H}(D'\,du + D''\,dv) = 0. \end{aligned}\right. \tag{28}$$

L'élimination de $\frac{du}{dv}$ nous conduit à l'équation aux rayons de courbure principaux,

$$(DD'' - D'^2)R^2 - RH(GD - 2FD' + ED'') + H^4 = 0. \tag{29}$$

Cette équation contient le théorème de Gauss; car on en déduit, pour la courbure totale, l'expression

$$\frac{1}{RR'} = \frac{DD'' - D'^2}{H^4}, \tag{30}$$

qui ne dépend, nous l'avons vu, que de l'élément linéaire.

Si l'on élimine R entre les équations (28), on obtiendra l'équation différentielle des lignes de courbure sous la forme

$$(FD - ED')\,du^2 + (GD - ED'')\,du\,dv + (GD' - FD'')\,dv^2 = 0. \tag{31}$$

Enfin la représentation sphérique de la surface sera donnée par la formule

$$\left\{\begin{aligned} d\sigma^2 &= dc^2 + dc'^2 + dc''^2\\ &= \frac{G}{H^4}(D\,du + D'\,dv)^2 - \frac{2F}{H^4}(D\,du + D'\,dv)(D'\,du + D''\,dv)\\ &\qquad + \frac{E}{H^4}(D'\,du + D''\,dv)^2. \end{aligned}\right. \tag{32}$$

702. Il nous reste maintenant à indiquer comment on résoudra la question suivante : Étant données les valeurs de D, D', D'' en

fonction de u et de v, déterminer la surface, c'est-à-dire trouver les valeurs de x, y, z. La solution se présente ici sous une forme moins simple et moins symétrique que lorsqu'on emploie les formules de M. Codazzi. Cependant, on trouve encore dans le Mémoire de Gauss un système de formules qui peut conduire au résultat que nous avons en vue.

Il est aisé de reconnaître que les équations déjà obtenues permettent, lorsqu'on connaît D, D', D'', d'exprimer les dérivées secondes de x, y, z en fonction des dérivées premières. Si l'on reprend, en effet, l'expression de c, on aura évidemment

$$\begin{aligned}
H^2 c^2 &= \left(\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 \\
&= \left[\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2\right]\left[\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2\right] - \left(\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2 \\
&= \left[E - \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2\right]\left[G - \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2\right] - \left[F - \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}\right]^2,
\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$c^2 = 1 - \Delta x, \tag{33}$$

Δx désignant l'invariant du premier ordre de x. En portant cette valeur de c dans les deux premières équations des systèmes (8) et (9), on aura deux équations qui contiendront les dérivées secondes de x. On les adjoindra à la relation (22) pour tirer de ces trois équations les trois dérivées secondes de x. Au reste, on peut obtenir le même résultat d'une manière plus élégante.

Remarquons, en effet, qu'on peut toujours trouver trois quantités A, B, C permettant d'écrire les relations

$$\left\{\begin{aligned}
\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} &= A c + B\frac{\partial x}{\partial u} + C\frac{\partial x}{\partial v}, \\
\frac{\partial^2 y}{\partial u^2} &= A c' + B\frac{\partial y}{\partial u} + C\frac{\partial y}{\partial v}, \\
\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} &= A c'' + B\frac{\partial z}{\partial u} + C\frac{\partial z}{\partial v};
\end{aligned}\right. \tag{34}$$

car ces équations, considérées comme devant déterminer A, B, C, ont leur déterminant différent de zéro.

Si on les ajoute, après les avoir multipliées respectivement par c, c', c'', puis par $\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}$, et enfin par $\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}$, on obtiendra

les relations

$$A = \frac{D}{H},$$
$$\frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial u} = BE + CF,$$
$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v} = BF + CG,$$

d'où l'on pourra tirer les valeurs de A, B, C. En les portant dans la première des équations (34), on aura

$$(35)\quad \left\{ \begin{aligned} H^2 \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = DHc &+ \left(\frac{G}{2}\frac{\partial E}{\partial u} - F\frac{\partial F}{\partial u} + \frac{F}{2}\frac{\partial E}{\partial v}\right)\frac{\partial x}{\partial u} \\ &+ \left(E\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{E}{2}\frac{\partial E}{\partial v} - \frac{F}{2}\frac{\partial E}{\partial u}\right)\frac{\partial x}{\partial v}. \end{aligned} \right.$$

Par des calculs analogues, on obtiendra deux autres équations qui permettront de constituer le système suivant :

$$(36)\quad \left\{ \begin{aligned} H^2 \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} &= DHc + \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial u}\left(G\frac{\partial x}{\partial u} - F\frac{\partial x}{\partial v}\right) + \left(\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v}\right)\left(E\frac{\partial x}{\partial v} - F\frac{\partial x}{\partial u}\right), \\ H^2 \frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} &= D'Hc + \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v}\left(G\frac{\partial x}{\partial u} - F\frac{\partial x}{\partial v}\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u}\left(E\frac{\partial x}{\partial v} - F\frac{\partial x}{\partial u}\right), \\ H^2 \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} &= D''Hc + \left(\frac{\partial F}{\partial v} - \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u}\right)\left(G\frac{\partial x}{\partial u} - F\frac{\partial x}{\partial v}\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial v}\left(E\frac{\partial x}{\partial v} - F\frac{\partial x}{\partial u}\right). \end{aligned} \right.$$

Si l'on remplace c par sa valeur tirée de l'équation (33), les formules précédentes ne contiendront plus que les dérivées de x. On obtiendrait des relations analogues en remplaçant x et c par y et c' ou par z et c''.

703. Nous ne nous arrêterons pas à la discussion complète du système précédent, qui est entièrement dû à Gauss. Il serait aisé de prouver que les équations (36) admettent une intégrale contenant trois constantes arbitraires; mais nous répéterions, sous une forme différente, une discussion déjà faite au Livre I. Nous remarquerons, seulement, que le système précédent aurait pu conduire immédiatement à l'équation du second ordre qui définit les surfaces admettant l'élément linéaire donné.

Nous pouvons, en effet, déduire des formules (36) les valeurs

de D, D′, D″ et calculer DD″ — D′², ce qui donne

$$
(37)\quad \left\{
\begin{aligned}
&(\mathrm{DD''}-\mathrm{D'^2})c^2\mathrm{H}^2\\
&\quad= \left[\mathrm{H}^2\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}-\frac{1}{2}\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial v}\left(\mathrm{G}\frac{\partial x}{\partial u}-\mathrm{F}\frac{\partial x}{\partial v}\right)-\frac{1}{2}\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial u}\left(\mathrm{E}\frac{\partial x}{\partial v}-\mathrm{F}\frac{\partial x}{\partial u}\right)\right]^2\\
&\quad-\left[\mathrm{H}^2\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}-\frac{1}{2}\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial u}\left(\mathrm{G}\frac{\partial x}{\partial u}-\mathrm{F}\frac{\partial x}{\partial v}\right)-\left(\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial u}-\frac{1}{2}\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial v}\right)\left(\mathrm{E}\frac{\partial x}{\partial v}-\mathrm{F}\frac{\partial x}{\partial u}\right)\right]\\
&\quad\times\left[\mathrm{H}^2\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}-\left(\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial v}-\frac{1}{2}\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial u}\right)\left(\mathrm{G}\frac{\partial x}{\partial u}-\mathrm{F}\frac{\partial x}{\partial v}\right)-\frac{1}{2}\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial v}\left(\mathrm{E}\frac{\partial x}{\partial v}-\mathrm{F}\frac{\partial x}{\partial u}\right)\right]
\end{aligned}
\right.
$$

En remplaçant c^2 par sa valeur $1-\Delta x$, tirée de l'équation (33), et DD″ — D′² par son expression déduite de la formule (21), on aura une équation ne contenant plus que les dérivées de x et les coefficients de l'élément linéaire. *C'est l'équation aux dérivées partielles du second ordre dont l'intégration donnerait la solution complète du problème proposé.* Nous l'obtiendrons par bien d'autres méthodes plus précises. Mentionnons, dès à présent, une propriété qui ressort assez simplement des raisonnements précédents.

Si l'on appelle selon l'usage r, s, t les dérivées secondes de x, l'équation différentielle des *caractéristiques* de l'équation précédente, écrite sous la forme $\Phi(r, s, t) = 0$, sera

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r}dv^2 - \frac{\partial \Phi}{\partial s}du\,dv + \frac{\partial \Phi}{\partial t}du^2 = 0.$$

Les formules (36) nous montrent immédiatement que cette équation peut s'écrire

$$(38)\qquad \mathrm{D}\,du^2 + 2\mathrm{D}'\,du\,dv + \mathrm{D}''\,dv^2 = 0.$$

Donc *les caractéristiques de l'équation aux dérivées partielles* (37) *sont les lignes asymptotiques de la surface.*

CHAPITRE IV.

ÉQUATION AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DES SURFACES APPLICABLES SUR UNE SURFACE DONNÉE.

Méthode directe permettant d'obtenir immédiatement l'équation aux dérivées partielles dont dépend la recherche des surfaces applicables sur une surface donnée. — Remarque de Bour sur une intégrale première de cette équation — Autres méthodes conduisant à la même équation. — Emploi des paramètres différentiels de M. Beltrami. — Développement de l'équation lorsqu'on choisit différents systèmes de coordonnées. Coordonnées symétriques. — Courbes parallèles et leurs trajectoires orthogonales. — Cas où la surface est définie par son équation en coordonnées rectilignes.

---

704. Nous allons indiquer maintenant différentes méthodes qui permettent de former l'équation aux dérivées partielles des surfaces applicables sur une surface donnée. Une des plus directes est celle que nous avons donnée en 1872 dans notre *Mémoire sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques.*

Le problème posé peut s'énoncer comme il suit : E, F, G *étant des fonctions données de u et de v, trouver toutes les fonctions x, y, z de u et de v qui satisfont identiquement à l'équation*

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2, \tag{1}$$

où du et dv peuvent être pris arbitrairement.

Écrivons l'égalité précédente sous la forme

$$dx^2 + dy^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2 - dz^2. \tag{2}$$

Le premier membre représente le carré de l'élément linéaire du plan et, par conséquent, la surface dont l'élément linéaire a pour carré

$$E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2 - \left(\frac{\partial z}{\partial u}\,du + \frac{\partial z}{\partial v}\,dv\right)^2$$

devra avoir sa courbure nulle. En écrivant cette condition, on obtiendra une équation aux dérivées partielles pour z. Nous allons former cette équation, et nous verrons qu'elle est du second ordre.

Désignons, pour abréger, par p, q, r, s, t les dérivées premières et secondes de z par rapport à u et à v, et, pour exprimer que la courbure est nulle, servons-nous de la formule (21) du

Chapitre précédent, où nous remplacerons E, F, G respectivement par $E-p^2$, $F-pq$, $G-q^2$. Nous aurons l'équation

$$\begin{vmatrix} 4\dfrac{\partial^2 F}{\partial u\,\partial v}-2\dfrac{\partial^2 E}{\partial v^2}-2\dfrac{\partial^2 G}{\partial u^2}+4s^2-4rt & \dfrac{\partial E}{\partial u}-2pr & 2\dfrac{\partial F}{\partial u}-\dfrac{\partial E}{\partial v}-2qr \\ 2\dfrac{\partial F}{\partial v}-\dfrac{\partial G}{\partial u}-2pt & E-p^2 & F-pq \\ \dfrac{\partial G}{\partial v}-2qt & F-pq & G-q^2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & \dfrac{\partial E}{\partial v}-2ps & \dfrac{\partial G}{\partial u}-2qs \\ \dfrac{\partial E}{\partial v}-2ps & E-p^2 & F-pq \\ \dfrac{\partial G}{\partial u}-2qs & F-pq & G-q^2 \end{vmatrix}.$$

Par quelques additions de colonnes, on donnera à cette équation la forme plus élégante

$$(3)\qquad \begin{vmatrix} 1 & 2r & p & q \\ 2t & 4L+4s^2 & 2\dfrac{\partial F}{\partial v}-\dfrac{\partial G}{\partial u} & \dfrac{\partial G}{\partial v} \\ p & \dfrac{\partial E}{\partial u} & E & F \\ q & 2\dfrac{\partial F}{\partial u}-\dfrac{\partial E}{\partial v} & F & G \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2s & p & q \\ 2s & 4s^2 & \dfrac{\partial E}{\partial v} & \dfrac{\partial G}{\partial u} \\ p & \dfrac{\partial E}{\partial v} & E & F \\ q & \dfrac{\partial G}{\partial u} & F & G \end{vmatrix},$$

où L est la quantité définie par l'équation (18) du Chapitre précédent. Le développement des deux déterminants n'offre aucune difficulté et nous conduit à l'équation cherchée

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} &-4(EG-F^2)(rt-s^2) \\ &+2pr\left[2G\frac{\partial F}{\partial v}-G\frac{\partial G}{\partial u}-F\frac{\partial G}{\partial v}\right]+2qr\left[E\frac{\partial G}{\partial v}+F\frac{\partial G}{\partial u}-2F\frac{\partial F}{\partial v}\right] \\ &+4ps\left[F\frac{\partial G}{\partial u}-G\frac{\partial E}{\partial v}\right]+4qs\left[F\frac{\partial E}{\partial v}-E\frac{\partial G}{\partial u}\right] \\ &+2pt\left[G\frac{\partial E}{\partial u}+F\frac{\partial E}{\partial v}-2F\frac{\partial F}{\partial u}\right]+2qt\left[2E\frac{\partial F}{\partial u}-E\frac{\partial E}{\partial v}-F\frac{\partial E}{\partial u}\right] \\ &+(E-p^2)\left[\frac{\partial E}{\partial v}\frac{\partial G}{\partial v}-2\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial G}{\partial v}+\left(\frac{\partial G}{\partial u}\right)^2\right] \\ &+[F-pq]\left[\frac{\partial E}{\partial u}\frac{\partial G}{\partial v}-\frac{\partial E}{\partial v}\frac{\partial G}{\partial u}-2\frac{\partial E}{\partial v}\frac{\partial F}{\partial v}-2\frac{\partial G}{\partial u}\frac{\partial F}{\partial u}+4\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial F}{\partial v}\right] \\ &+[G-q^2]\left[\frac{\partial G}{\partial u}\frac{\partial E}{\partial u}-2\frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial E}{\partial u}+\left(\frac{\partial E}{\partial v}\right)^2\right] \\ &+2[EG-F^2-Gp^2-Eq^2+2Fpq]\left[2\frac{\partial^2 F}{\partial u\,\partial v}-\frac{\partial^2 E}{\partial v^2}-\frac{\partial^2 G}{\partial u^2}\right]=0. \end{aligned}\right.$$

Il nous reste maintenant à examiner si toute solution de cette équation fournira une solution du problème, c'est-à-dire fera connaître une surface admettant l'élément linéaire donné.

Il semble au premier abord que la réponse doive être absolument affirmative. Nous avons exprimé, en effet, que la surface dont l'élément linéaire a pour expression

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2 - dz^2 \tag{5}$$

a sa courbure nulle. Or nous avons vu que, dans ce cas, on peut ramener l'élément linéaire à la forme

$$dx^2 + dy^2$$

et, par conséquent, constituer une solution du problème proposé. Mais la méthode suivie au n° 684 suppose essentiellement que l'élément linéaire (5) n'est pas un carré parfait; et, d'autre part, il est aisé de reconnaître que l'invariant de Gauss s'annule quand cet élément linéaire devient un carré parfait, c'est-à-dire lorsqu'on a

$$(E - p^2)(G - q^2) - (F - pq)^2 = 0.$$

Nous pouvons donc énoncer la proposition suivante :

L'équation différentielle du second ordre (3) *admet toutes les intégrales de l'équation du premier ordre*

$$\Delta z = 1, \tag{6}$$

dont dépend le problème des lignes géodésiques. Mais toute intégrale de l'équation (3) *qui ne satisfait pas à l'équation précédente donne une solution du problème, c'est-à-dire une surface admettant l'élément linéaire donné.*

Bour avait déjà remarqué ([1]), sans donner la raison de ce fait, que les solutions de l'équation (6) appartiennent à l'équation (3). D'autre part, M. Weingarten, qui, dans un travail très récent ([2]), a repris la méthode précédente, a remarqué qu'alors même que E, F, G et z seraient réels, la surface correspondante peut bien être

---

([1]) *Journal de l'École Polytechnique*, XXXIX[e] Cahier, p. 15.

([2]) WEINGARTEN (J.), *Ueber die Theorie der aufeinander abwickelbaren Oberflächen*. Berlin; 1884.

imaginaire. En effet, la solution z peut être telle que le second membre de la formule (5) soit décomposable en deux facteurs linéaires réels. Alors, si l'on ne veut employer que des fonctions réelles, il sera réductible seulement à la forme

$$dx^2 - dy^2.$$

Mais cette remarque n'a évidemment d'intérêt que si l'on se préoccupe de la distinction entre les quantités réelles et imaginaires, distinction qui est secondaire dans une telle question.

Dans le travail déjà cité, j'ai remarqué que la même méthode permettrait de former l'équation dont dépend la distance du point de la surface à un point fixe de l'espace. En effet, si l'on emploie des coordonnées polaires, l'équation à résoudre sera

$$dr^2 + r^2 \sin^2\theta\, d\varphi^2 + r^2\, d\theta^2 = \mathrm{E}\, du^2 + 2\mathrm{F}\, du\, dv + \mathrm{G}\, dv^2$$

ou encore

$$\frac{\mathrm{E}\, du^2 + 2\mathrm{F}\, du\, dv + \mathrm{G}\, dv^2}{r^2} - \frac{dr^2}{r^2} = \sin^2\theta\, d\varphi^2 + d\theta^2.$$

En exprimant que le premier membre est le carré de l'élément linéaire d'une surface de courbure totale égale à 1, on obtiendra une équation du second ordre à laquelle satisfera r. Nous la formerons plus loin.

705. Nous allons maintenant faire connaître d'autres méthodes qui conduiraient également à l'équation (4). Imaginons, par exemple, que l'on rapporte la surface à un trièdre (T) et reprenons le système de formules employé au Livre V (Tableau I, p. 382).

Si nous désignons par x, y, z les coordonnées *par rapport au trièdre* (T) d'un point fixe A de l'espace, les projections du déplacement de ce point données par les formules (B) devront être toutes nulles. On aura donc

$$(7)\quad \begin{cases} \xi + qz - ry + \dfrac{\partial x}{\partial u} = 0, \\ \eta + rx - pz + \dfrac{\partial y}{\partial u} = 0, \\ py - qx + \dfrac{\partial z}{\partial u} = 0; \end{cases} \qquad (8)\quad \begin{cases} \xi_1 + q_1 z - r_1 y + \dfrac{\partial x}{\partial v} = 0, \\ \eta_1 + r_1 x - p_1 z + \dfrac{\partial y}{\partial v} = 0, \\ p_1 y - q_1 x + \dfrac{\partial z}{\partial v} = 0. \end{cases}$$

On sait que ξ, η, ξ_1, η_1, r et r_1 dépendent exclusivement de l'élément linéaire, tandis que p, q, p_1, q_1 varient lorsque la surface se déforme d'une manière quelconque. Posons

$$x^2+y^2+z^2=2\rho; \tag{9}$$

ρ désignera la moitié du carré de la distance du point fixe A au point considéré M de la surface. Nous allons former l'équation aux dérivées partielles à laquelle satisfait ρ. Pour cela nous ajouterons les équations de chacun des groupes (7) et (8) après les avoir multipliées respectivement par x, y, z, ce qui donnera les deux équations

$$\xi x+\eta y+\frac{\partial\rho}{\partial u}=0, \qquad \xi_1 x+\eta_1 y+\frac{\partial\rho}{\partial v}=0. \tag{10}$$

Au moyen des formules (9) et (10) nous pourrons exprimer x, y, z en fonction des dérivées de ρ et des coefficients de l'élément linéaire. Si maintenant nous tirons des équations (7) et (8) les valeurs de p, q, p_1, q_1, nous aurons

$$\left\{\begin{aligned} pz&=rx+\frac{\partial y}{\partial u}+\eta, & p_1z&=r_1x+\frac{\partial y}{\partial v}+\eta_1,\\ qz&=ry-\frac{\partial x}{\partial u}-\xi, & q_1z&=r_1y-\frac{\partial x}{\partial v}-\xi_1;\end{aligned}\right. \tag{11}$$

ces valeurs, substituées dans la formule

$$\frac{\partial r}{\partial v}-\frac{\partial r_1}{\partial u}=pq_1-qp_1,$$

nous donneront la relation

$$\left\{\begin{aligned}\left(\frac{\partial r}{\partial v}-\frac{\partial r_1}{\partial u}\right)z^2=&\left(rx+\frac{\partial y}{\partial u}+\eta\right)\left(r_1y-\frac{\partial x}{\partial v}-\xi_1\right)\\ &-\left(ry-\frac{\partial x}{\partial u}-\xi\right)\left(r_1x+\frac{\partial y}{\partial v}+\eta_1\right).\end{aligned}\right. \tag{12}$$

Il suffira de remplacer x, y, z par leurs valeurs tirées des équations (9) et (10); on obtiendra ainsi une équation qui contiendra seulement ρ et ses dérivées des deux premiers ordres combinées avec ξ, η, ξ_1, η_1, r, r_1 et leurs dérivées, quantités qui, comme nous l'avons déjà remarqué, dépendent exclusivement des coefficients de l'élément linéaire donné. Si l'on introduit successivement les hypothèses qui correspondent aux différents systèmes de formules

que nous avons développées au Livre V [II, p. 384, 385, 387], on aura, dans chaque cas, l'équation aux dérivées partielles dont dépend la variable ρ.

706. On peut employer une méthode analogue pour former l'équation à laquelle satisfait, non plus ρ, mais une des coordonnées rectangulaires du point de la surface cherchée rapportée à des axes fixes.

Si $a, b, c; a', b', \ldots$ désignent les cosinus directeurs qui déterminent la position du trièdre (T) invariablement lié à la surface, et si x, y, z sont maintenant les coordonnées du point de la surface, c'est-à-dire du sommet du trièdre, par rapport à des axes *fixes*, on a, comme l'on sait (n° 503),

$$\frac{\partial x}{\partial u} = a\xi + b\eta, \qquad \frac{\partial x}{\partial v} = a\xi_1 + b\eta_1, \tag{13}$$

de sorte que a, b peuvent s'exprimer en fonction des dérivées de x. Écrivons les équations

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial a}{\partial u} &= br - cq,\\ \frac{\partial b}{\partial u} &= cp - ar; \end{aligned}\right. \tag{14}$$

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial a}{\partial v} &= br_1 - cq_1,\\ \frac{\partial b}{\partial v} &= cp_1 - ar_1. \end{aligned}\right. \tag{15}$$

Nous en déduisons

$$\left\{\begin{aligned} cp &= ar + \frac{\partial b}{\partial u}, \qquad & cp_1 &= ar_1 + \frac{\partial b}{\partial v},\\ cq &= br - \frac{\partial a}{\partial u}, \qquad & cq_1 &= br_1 - \frac{\partial a}{\partial v}, \end{aligned}\right. \tag{16}$$

et si nous portons ces expressions de p, q, p_1, q_1 dans l'équation

$$\frac{\partial r}{\partial v} - \frac{\partial r_1}{\partial u} = pq_1 - qp_1, \tag{17}$$

il viendra

$$\left\{\begin{aligned} &(1 - a^2 - b^2)\left(\frac{\partial r}{\partial v} - \frac{\partial r_1}{\partial u}\right)\\ &\quad = \left(ar + \frac{\partial b}{\partial u}\right)\left(br_1 - \frac{\partial a}{\partial v}\right) - \left(ar_1 + \frac{\partial b}{\partial v}\right)\left(br - \frac{\partial a}{\partial u}\right). \end{aligned}\right. \tag{18}$$

Il suffit de remplacer a et b par leurs valeurs tirées des relations (13)

pour obtenir l'équation du second ordre à laquelle satisfait x, et l'on voit de plus que toute intégrale de l'équation (18), pour laquelle on n'aura pas

$$c^2 = 1 - a^2 - b^2 = 0,$$

permettra de déterminer a, b, p, q, p_1, q_1 et par conséquent donnera une solution bien déterminée du problème proposé.

707. Enfin j'indiquerai une dernière méthode fondée sur la considération des paramètres différentiels.

Conservons les notations du n° 679; nous avons vu que, si l'on pose

$$2\rho = x^2 + y^2 + z^2,$$

les premiers invariants de ρ ont les expressions suivantes

$$(19)\qquad \left\{\begin{aligned} \Delta\rho &= 2\rho - P^2,\\ \Delta_2\rho &= P\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right) + 2,\\ \Delta(\rho, P) &= -\frac{Q^2}{R} - \frac{Q'^2}{R'},\\ \Delta P &= \frac{Q^2}{R^2} + \frac{Q'^2}{R'^2}. \end{aligned}\right.$$

Il résulte d'ailleurs de la définition de P, Q, Q' que l'on a

$$(20)\qquad 2\rho = P^2 + Q^2 + Q'^2.$$

Ces diverses équations vont nous permettre d'établir une relation entre RR' et les invariants différentiels de ρ. On en déduit, en effet,

$$\Delta(\rho, P)[\Delta_2\rho - 2] = -P\,\Delta P - P\,\frac{Q^2 + Q'^2}{RR'}$$

ou, en tenant compte de l'équation (20),

$$\Delta(\rho, P)[\Delta_2\rho - 2] = -P\,\Delta P - P\,\frac{\Delta\rho}{RR'}.$$

Si l'on remplace P par sa valeur tirée de la première équation (19), ce qui donne

$$\Delta(\rho, \sqrt{2\rho - \Delta\rho})[\Delta_2\rho - 2] = -\sqrt{2\rho - \Delta\rho}\,\Delta(\sqrt{2\rho - \Delta\rho}) - \sqrt{2\rho - \Delta\rho}\,\frac{\Delta\rho}{RR'},$$

et si l'on développe les calculs, on est conduit à la relation cher-

chée

$$(21)\qquad 4\,\Delta\rho(\Delta_2\rho-1)+\Delta\,\Delta\rho-2\,\Delta_2\rho\,\Delta(\rho,\Delta\rho)+4\,\Delta\rho\,\frac{2\rho-\Delta\rho}{RR'}=0.$$

Il suffira maintenant de remplacer RR′ par sa valeur en fonction des coefficients de l'élément linéaire pour obtenir l'équation du second ordre à laquelle satisfait ρ.

Nous rencontrons ici un fait curieux et qui avait été déjà annoncé. Lorsqu'on fait des applications de l'équation (21), lorsqu'on la calcule dans des cas particuliers, on trouve qu'elle contient toujours en facteur $\Delta\rho$. En d'autres termes, le quotient

$$(22)\qquad \sigma(\rho)=\frac{\Delta\,\Delta\rho-2\,\Delta_2\rho\,\Delta(\rho,\Delta\rho)}{4\,\Delta\rho}$$

est toujours entier. C'est une fonction homogène et du second degré par rapport aux dérivées premières et secondes de ρ. Pour avoir l'équation aux dérivées partielles débarrassée de tout facteur étranger, il faut donc introduire ce nouvel invariant, et elle prend alors la forme simple

$$(23)\qquad \Delta_2\rho-1+\sigma(\rho)+\frac{2\rho-\Delta\rho}{RR'}=0.$$

Il est aisé maintenant d'en déduire l'équation à laquelle satisfait une fonction linéaire quelconque des coordonnées x, y, z.

En effet, l'équation précédente admet la solution

$$\rho=\frac{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}{2},$$

et cela, quelles que soient les constantes a, b, c. Si nous prenons les termes de degré supérieur en a, b, c, qui sont du second degré, leur ensemble sera donc égal à zéro. Posons, pour abréger,

$$(24)\qquad \varphi=ax+by+cz;$$

nous aurons ainsi

$$\sigma(\varphi)+\frac{a^2+b^2+c^2-\Delta(\varphi)}{RR'}=0.$$

Telle est l'équation à laquelle satisfera φ.

Si l'on fait

$$b=c=0,\qquad a=1,$$

φ deviendra égal à x, et il restera l'équation

$$\sigma(x) + \frac{1 - \Delta x}{RR'} = 0. \tag{25}$$

Mais, si l'on suppose que φ soit une de ces fonctions pour lesquelles on a

$$a^2 + b^2 + c^2 = 0,$$

si, par exemple, on prend

$$\varphi = x + iy,$$

il viendra l'équation

$$\sigma(\varphi) - \frac{\Delta\varphi}{RR'} = 0, \tag{26}$$

qui est homogène et plus simple que la précédente. Nous allons maintenant développer ces équations en employant différents systèmes de coordonnées.

708. Dans le cas des coordonnées symétriques, on a

$$ds^2 = 4\lambda^2\, du\, dv;$$

l'équation (4) devient ici

$$\left(r - 2p\frac{\partial \log\lambda}{\partial u}\right)\left(t - 2q\frac{\partial \log\lambda}{\partial v}\right) - s^2 - 4(\lambda^2 - pq)\frac{\partial^2 \log\lambda}{\partial u\, \partial v} = 0. \tag{27}$$

Elle coïncide, aux notations près, avec celle qui a été donnée par Bour [1].

Si l'on garde seulement, dans l'équation précédente, les termes du second degré, on obtient la suivante

$$\left(r - 2p\frac{\partial \log\lambda}{\partial u}\right)\left(t - 2q\frac{\partial \log\lambda}{\partial v}\right) - s^2 + 4pq\frac{\partial^2 \log\lambda}{\partial u\, \partial v} = 0, \tag{28}$$

qui n'est autre que l'équation (26), écrite en coordonnées symétriques, et qui a été donnée par M. Bonnet [2].

Si l'on suppose que l'une des familles coordonnées soit formée de géodésiques, il faudra prendre

$$ds^2 = du^2 + C^2\, dv^2,$$

---

(1) *Journal de l'École Polytechnique*, XXXIXe Cahier, p. 15.

(2) *Journal de l'École Polytechnique*, XLIIe Cahier, p. 3.

et l'équation (4) nous donnera

$$(29)\quad \begin{cases} C(rt-s^2)+r\left[C^2\dfrac{\partial C}{\partial u}p-\dfrac{\partial C}{\partial v}q\right] \\ \quad +2qs\dfrac{\partial C}{\partial u}-C^2\dfrac{\partial^2 C}{\partial u^2}p^2-q^2\left[\dfrac{\partial^2 C}{\partial u^2}+\dfrac{1}{C}\left(\dfrac{\partial C}{\partial u}\right)^2\right]+C^2\dfrac{\partial^2 C}{\partial u^2}=0. \end{cases}$$

Nous ne multiplierons pas les exemples; mais nous indiquerons encore la forme que prend l'équation au cas où l'on veut trouver les surfaces applicables sur une surface qui est simplement définie par son équation en coordonnées rectangulaires,

$$z=f(x,y).$$

En désignant par les lettres p, q, ... les dérivées de z, on aura ici

$$E=1+p^2,\qquad F=pq,\qquad G=1+q^2,$$

et l'équation cherchée sera

$$(30)\quad \begin{cases} (s^2-rt)(P^2+Q^2-1)+(S^2-RT)(1+p^2+q^2) \\ \qquad\qquad +(rT+tR-2sS)(Pp+Qq)=0, \end{cases}$$

les lettres majuscules désignant les dérivées de la fonction inconnue Z. L'équation admet la solution

$$Z=z;$$

ce qui était évident *a priori*.

CHAPITRE V.

ÉTUDE DE L'ÉQUATION AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DONT DÉPEND LE PROBLÈME DE LA DÉFORMATION.

Notions préliminaires sur les équations du second ordre qui sont linéaires par rapport à r, s, t, $rt - s^2$. — Problème de Cauchy. — Définition précise des caractéristiques. — Théorie géométrique de l'intégration, reposant sur les propriétés des caractéristiques. — Application à quelques exemples simples. — Étude particulière de l'équation dont dépend le problème de la déformation. — On peut énoncer ici le problème de Cauchy sous la forme suivante : Déformer la surface de telle manière qu'une courbe tracée sur elle prenne une forme donnée à l'avance. — Propriété remarquable des asymptotiques. — Problèmes divers. — Déformer une surface de telle manière qu'elle puisse s'inscrire dans une développable donnée, suivant une courbe donnée. — Nouvelles manières de poser le problème de la déformation. — Équations simultanées auxquelles doivent satisfaire les paramètres des deux familles d'asymptotiques. — Démonstration de diverses propositions sur les asymptotiques et les surfaces gauches. — Équations simultanées auxquelles satisfont les coordonnées curvilignes, considérées comme fonctions des paramètres des deux familles d'asymptotiques. — Application à un cas particulier.

---

709. Nous avons déjà indiqué que les caractéristiques de l'équation aux dérivées partielles dont dépend le problème de la déformation sont les lignes asymptotiques de la surface cherchée. Avant de donner une démonstration nouvelle de ce résultat et d'en faire ressortir la signification et les conséquences, nous entrerons dans quelques considérations générales sur les courbes auxquelles on a donné le nom de *caractéristiques*. Cette étude préliminaire nous paraît d'autant plus nécessaire que Monge, il faut bien le reconnaître, n'a jamais donné une théorie satisfaisante de ses méthodes d'intégration.

Bornons-nous, pour plus de netteté, à une équation de la forme

$$A(rt - s^2) + Br + 2Cs + B't + D = 0, \tag{1}$$

où A, B, C, D, B′ sont des fonctions quelconques de x, y, z, p, q, et considérons x, y, z comme les coordonnées d'un point de l'es-

pace. Pour trouver toutes les solutions possibles de l'équation proposée, il est clair que l'on peut se contenter de chercher toutes les surfaces, satisfaisant à l'équation (1), assujetties à la condition de passer par une courbe donnée et d'admettre en chaque point de cette courbe un plan tangent déterminé.

Si l'on se déplace le long de cette courbe, x, y, z, p, q sont des fonctions connues d'un paramètre variable et la différentiation nous donne les relations

$$dz = p\,dx + q\,dy; \tag{2}$$

$$\left\{\begin{aligned} dp &= r\,dx + s\,dy,\\ dq &= s\,dx + t\,dy.\end{aligned}\right. \tag{3}$$

Les deux équations (3) ne nous permettent pas de déterminer les valeurs des trois dérivées r, s, t au point considéré de la courbe; mais, si l'on en tire r et t en fonction de s pour les porter dans l'équation (1), celle-ci prend la forme

$$\mathrm{M}s - \mathrm{L} = 0, \tag{4}$$

où l'on a

$$\left\{\begin{aligned} \mathrm{M} &= \mathrm{A}(dp\,dx + dq\,dy) + \mathrm{B}\,dy^2 + \mathrm{B}'\,dx^2 - 2\,\mathrm{C}\,dx\,dy,\\ \mathrm{L} &= \mathrm{A}\,dp\,dq + \mathrm{B}\,dp\,dy + \mathrm{B}'\,dq\,dx + \mathrm{D}\,dx\,dy.\end{aligned}\right. \tag{5}$$

Par conséquent, si M n'est pas nul, l'équation (4) détermine s et les équations (3) font ensuite connaître r et t.

Le même raisonnement, appliqué aux dérivées d'ordre supérieur, nous montre que les valeurs de toutes ces dérivées peuvent toujours être déterminées en chaque point de la courbe. On voit donc que, si l'on suppose la fonction z développée par la série de Taylor, on aura tous les coefficients de ce développement, pourvu toutefois que les valeurs initiales x_0, y_0 de x et de y se rapportent à un point de la courbe (C). Cauchy a considéré ce développement, et il a montré que, sous certaines conditions de continuité qu'il est inutile d'énoncer ici, il sera convergent et définira une intégrale de l'équation proposée, intégrale qui satisfera aux conditions énoncées. C'est dans ce sens que nous dirons que la condition de passer par une courbe donnée et d'être inscrite suivant cette courbe à une développable donnée définit une intégrale de l'équation aux dérivées partielles.

710. Mais les raisonnements qui précèdent supposent essentiellement que l'équation (4) fournit pour s une valeur qui n'est ni infinie ni indéterminée.

Écartons la considération de ce qui arrive en des points isolés. Si M est nul en tous les points de la courbe sans que L le soit, le problème proposé sera évidemment impossible, au moins si l'on se borne aux surfaces qui n'ont pas la courbe (C) pour ligne singulière. Au contraire, si M et L sont nuls, l'un et l'autre, en chaque point de la courbe (C), il est impossible de déterminer s et l'on reconnaît de même, en passant aux dérivées d'ordre supérieur, que, *dans chacun des ordres considérés successivement, une des dérivées peut être prise arbitrairement.*

Nous donnerons le nom de caractéristique *à l'assemblage formé par une courbe et la développable qui la contient, toutes les fois que les fonctions d'une seule variable qui déterminent cet assemblage satisfont aux deux conditions*

$$M = 0, \qquad L = 0. \tag{6}$$

Sur toute intégrale il y a une infinité de caractéristiques. En effet, si l'on se déplace sur une intégrale, on aura toujours l'équation (4) comme conséquence des équations (1), (2), (3), et, si l'on choisit pour les déplacements les directions qui satisfont à l'unique condition $M = 0$, l'équation (4) donnera également $L = 0$.

Comme l'équation $M = 0$ est du second degré en $\frac{dy}{dx}$, il y a, en général, deux familles distinctes de caractéristiques. On peut du reste séparer nettement ces deux familles et obtenir leurs équations sous une forme simple en opérant de la manière suivante; λ désignant une arbitraire quelconque, on a

$$\begin{aligned} 0 = AL + \lambda M = (A\,dp + B'\,dx + \lambda\,dy)(A\,dq + B\,dy + \lambda\,dx) \\ -(\lambda^2 + 2C\lambda + BB' - AD)\,dx\,dy. \end{aligned}$$

Si donc on prend successivement pour λ les deux racines λ_1 et λ_2 de l'équation

$$\lambda^2 + 2C\lambda + BB' - AD = 0, \tag{7}$$

on sera conduit aux deux équations

$$\begin{aligned} (A\,dp + B'\,dx + \lambda_1\,dy)(A\,dq + B\,dy + \lambda_1\,dx) = 0, \\ (A\,dp + B'\,dx + \lambda_2\,dy)(A\,dq + B\,dy + \lambda_2\,dx) = 0, \end{aligned}$$

qui se décomposent elles-mêmes en d'autres plus simples. En associant convenablement les facteurs obtenus et en ajoutant l'équation évidente

$$dz = p\,dx + q\,dy,$$

on sera conduit aux deux systèmes suivants

$$(8)\qquad \begin{cases} dz - p\,dx - q\,dy = 0, \\ A\,dp + B'\,dx + \lambda_1\,dy = 0, \\ A\,dq + B\,dy + \lambda_2\,dx = 0; \end{cases}$$

$$(9)\qquad \begin{cases} dz - p\,dx - q\,dy = 0, \\ A\,dp + B'\,dx + \lambda_2\,dy = 0, \\ A\,dq + B\,dy + \lambda_1\,dx = 0, \end{cases}$$

qui définissent les deux familles de caractéristiques. On voit que ces deux familles seront distinctes tant que les deux racines λ_1 et λ_2 seront inégales.

711. En résumé, le problème qui consiste à déterminer une intégrale de l'équation (1) tangente suivant une courbe donnée (C) à une développable donnée (Δ) est, en général, pleinement déterminé et admet une solution unique à moins que l'assemblage formé par la courbe (C) et la développable (Δ) qui la contient ne satisfasse aux équations (6) ou à l'un des systèmes (8), (9).

On peut évidemment présenter ce résultat sous une autre forme en disant que les caractéristiques sont les seules courbes suivant lesquelles deux intégrales différentes puissent être tangentes ou osculatrices. Ainsi :

Si deux intégrales de l'équation (1) *sont tangentes suivant une courbe, cette courbe est une caractéristique; en lui adjoignant les plans tangents, on obtient un assemblage qui satisfait aux équations* (6) *ou à l'un des systèmes* (8), (9).

Il résulte également des remarques précédentes que, si une surface quelconque est engendrée par des caractéristiques, c'est-à-dire s'il est possible de trouver sur cette surface une famille de courbes se succédant suivant une loi continue et qui, associées aux plans tangents, satisfassent chacune aux équations (8) ou (9), ou, ce qui est la même chose, aux équations (6), cette sur-

face donne une intégrale de l'équation (1). En effet, on peut toujours remonter de l'équation (6) à l'équation (4), puis, en remplaçant dp et dq par leurs valeurs, à l'équation (1). Cette équation sera vérifiée en tous les points par lesquels passera une caractéristique, c'est-à-dire dans toute l'étendue de la surface.

712. Bien que ce qui concerne l'intégration de l'équation aux dérivées partielles soit étranger au sujet que nous voulons étudier plus loin, nous allons en dire quelques mots pour montrer avec quelle facilité les résultats connus se déduisent des considérations précédentes.

Supposons que l'un des systèmes (8) et (9), le système (8) par exemple, présente une combinaison intégrable

$$\begin{aligned}\omega(dz - p\,dx - q\,dy) + \omega_1(\mathrm{A}\,dp + \mathrm{B}'\,dx + \lambda_1\,dy)&\\ + \omega_2(\mathrm{A}\,dq + \mathrm{B}\,dy + \lambda_2\,dx) &= d\varphi.\end{aligned}$$

Nous allons montrer que *toutes les intégrales de l'équation du premier ordre*

$$\varphi = \text{const.},$$

satisferont à l'équation proposée. En effet, pour toute intégrale I de l'équation précédente, les trois équations (8) se réduiront à deux. Il sera donc possible de satisfaire à ces deux équations en prenant des valeurs convenables pour les rapports de dx, dy, dz et, par suite, de déterminer, sur l'intégrale I, une famille de courbes pour lesquelles auront lieu les trois équations (8).

La surface I, contenant une famille de caractéristiques, sera nécessairement une intégrale de l'équation proposée. Cette conclusion ne pourrait souffrir d'exception que si, pour l'intégrale I, un au moins des facteurs ω se présentait sous une forme indéterminée.

Inversement, si toutes les solutions de l'équation

$$\varphi(x, y, z, p, q) = \text{const.} \tag{10}$$

sont des intégrales de l'équation (1), l'un des deux systèmes (8) et (9) admettra la combinaison intégrable $d\varphi$. En effet, les caractéristiques de l'équation (10) sont définies par le système

$$\frac{dx}{\dfrac{\partial\varphi}{\partial p}} = \frac{dy}{\dfrac{\partial\varphi}{\partial q}} = \frac{-dp}{\dfrac{\partial\varphi}{\partial x} + p\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}} = \frac{-dq}{\dfrac{\partial\varphi}{\partial y} + q\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}} = \frac{dz}{p\dfrac{\partial\varphi}{\partial p} + q\dfrac{\partial\varphi}{\partial q}}. \tag{11}$$

Comme on sait qu'il existe une infinité d'intégrales de l'équation (10), et par conséquent de l'équation (1), qui sont tangentes les unes aux autres suivant chacune de ces caractéristiques, on voit que les valeurs de dx, dy, dp, ... tirées des équations précédentes devront satisfaire à l'un des systèmes (8) et (9). On a ainsi pour φ l'un ou l'autre des deux systèmes

$$(12)\quad \begin{cases} -\mathrm{A}\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}+p\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}\right)+\mathrm{B}'\dfrac{\partial\varphi}{\partial p}+\lambda_1\dfrac{\partial\varphi}{\partial q}=0,\\ -\mathrm{A}\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}+q\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}\right)+\mathrm{B}\dfrac{\partial\varphi}{\partial q}+\lambda_2\dfrac{\partial\varphi}{\partial p}=0;\end{cases}$$

$$(13)\quad \begin{cases} -\mathrm{A}\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}+p\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}\right)+\mathrm{B}'\dfrac{\partial\varphi}{\partial p}+\lambda_2\dfrac{\partial\varphi}{\partial q}=0,\\ -\mathrm{A}\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}+q\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}\right)+\mathrm{B}\dfrac{\partial\varphi}{\partial q}+\lambda_1\dfrac{\partial\varphi}{\partial p}=0.\end{cases}$$

Supposons, par exemple, que le premier soit vérifié. Si nous ajoutons les équations (9) après les avoir multipliées respectivement par

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z},\quad \frac{1}{\mathrm{A}}\frac{\partial\varphi}{\partial p},\quad \frac{1}{\mathrm{A}}\frac{\partial\varphi}{\partial q},$$

nous aurons

$$\begin{aligned}\frac{\partial\varphi}{\partial z}dz+\frac{\partial\varphi}{\partial p}dp+\frac{\partial\varphi}{\partial q}dq+\left(\mathrm{B}'\frac{\partial\varphi}{\partial p}+\lambda_1\frac{\partial\varphi}{\partial q}-\mathrm{A}p\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)\frac{dx}{\mathrm{A}}&\\ +\left(\mathrm{B}\frac{\partial\varphi}{\partial q}+\lambda_2\frac{\partial\varphi}{\partial p}-\mathrm{A}q\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)\frac{dy}{\mathrm{A}}&=0\end{aligned}$$

ou, en tenant compte des équations (12),

$$d\varphi=0.$$

La proposition que nous avions en vue est donc établie : les équations (9) admettent la combinaison intégrable $d\varphi$; et l'on verra de même que, si la fonction φ satisfait aux équations (13), la combinaison intégrable $d\varphi$ est fournie par le système (8).

713. Ce premier point étant établi, arrivons au cas où l'un des systèmes (8) et (9) admet deux combinaisons intégrables du, dv. Alors il admettra aussi la combinaison intégrable

$$du-\varphi'(v)\,dv=d[u-\varphi(v)],$$

où φ désigne une fonction arbitraire; et, par suite, toutes les so-

lutions de l'équation

$$u - \varphi(v) = 0 \tag{14}$$

appartiendront à la proposée (1). L'équation précédente est d'ailleurs équivalente à la proposée ; car, si l'on élimine la fonction φ entre l'équation et ses deux premières dérivées, on est conduit à l'équation du second ordre

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = 0, \tag{15}$$

qui ne diffère de la proposée que par un facteur [1]. Ce facteur ne peut être nul, infini, ou indéterminé, que pour certaines solutions exceptionnelles; et, tant qu'il ne sera pas nul, l'équation (14) sera équivalente à la proposée.

Réciproquement, si l'équation du second ordre doit admettre une intégrale première de la forme (14), il résulte des raisonnements du numéro précédent que les trois fonctions

$$u, \quad v, \quad u - \varphi(v),$$

doivent chacune satisfaire à l'un des deux systèmes (12), (13). Mais, comme deux d'entre elles appartiennent au même système, il en sera nécessairement de même de la troisième, qui est une fonction des deux autres. Ainsi, *pour trouver, si cela est possible, les intégrales intermédiaires de la forme* (14), *il faudra rechercher si l'un des systèmes* (12) *ou* (13) *admet deux solutions distinctes.*

Le problème qui consiste à reconnaître si deux équations linéaires telles que les équations (12) ou (13) admettent une ou plusieurs solutions distinctes est un de ceux que l'on sait le mieux résoudre aujourd'hui. On peut donc déduire des propositions précédentes une méthode régulière de recherche des intégrales intermédiaires de l'équation proposée et, plus généralement, de toutes les équations du premier ordre dont les différentes solutions appartiennent à la proposée.

---

(1) On le vérifie aisément en tenant compte des équations (12) ou (13) auxquelles satisfont à la fois les fonctions u et v. Un calcul facile donne

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \frac{\dfrac{\partial u}{\partial p}\dfrac{\partial v}{\partial q} - \dfrac{\partial u}{\partial q}\dfrac{\partial v}{\partial p}}{A}[A(rt - s^2) + Br + 2Cs + B't + D].$$

714. Les indications précédentes, quelque incomplètes qu'elles soient, mettent en évidence le rôle des caractéristiques dans la recherche des intégrales de l'équation proposée. On pourrait les développer et en tirer une théorie complète de l'équation (1); nous nous contenterons ici de traiter quelques applications; mais auparavant il importe de remarquer que les équations (6) ne peuvent être remplacées par un des systèmes (8) ou (9) que si A est différent de zéro. Considérons, par exemple, le système (8). Lorsque A est nul, les deux dernières équations se réduisent à une seule. Pour éviter cet inconvénient nous remarquerons que, dans le cas général, on peut déduire des équations (8) les deux suivantes

$$(8)' \qquad \begin{cases} B\,dp - \lambda_1\,dq + D\,dx = 0, \\ B'\,dq - \lambda_2\,dp + D\,dy = 0, \end{cases}$$

par l'élimination soit de dx, soit de dy. Le système des équations (8) et (8)′ se réduira dans tous les cas à trois équations distinctes. En ajoutant de même aux équations (9) les deux suivantes

$$(9)' \qquad \begin{cases} B\,dp - \lambda_2\,dq + D\,dx = 0, \\ B'\,dq - \lambda_1\,dp + D\,dy = 0, \end{cases}$$

on n'éprouvera aucune difficulté dans les applications.

Considérons d'abord l'équation bien connue des surfaces développables

$$rt - s^2 = 0.$$

On a ici

$$B = C = B' = D = 0, \qquad A = 1, \qquad \lambda_1 = \lambda_2 = 0.$$

Les équations (8) se réduisent aux suivantes

$$dz - p\,dx - q\,dy = 0, \qquad dp = 0, \qquad dq = 0,$$

qui présentent trois combinaisons intégrables

$$dp, \quad dq, \quad d(z - px - qy).$$

On aura donc les deux intégrales du premier ordre

$$\begin{gathered} q = f(p), \\ z - px - qy = \varphi(p). \end{gathered}$$

Si l'on différentie la dernière équation, il restera

$$[x + y f'(p) + \varphi'(p)]\,dp = 0.$$

En supprimant dp, on a bien les trois équations qui définissent une surface développable.

Prenons maintenant l'équation

$$q^2 r - 2pqs + p^2 t = 0.$$

Ici encore, les deux valeurs de λ sont égales et les équations différentielles de la caractéristique sont

$$\begin{gathered} dz - p\,dx - q\,dy = 0, \\ p\,dx + q\,dy = 0, \\ q\,dp - p\,dq = 0. \end{gathered}$$

Elles admettent les trois combinaisons intégrables

$$dz = 0, \qquad d\frac{p}{q} = 0, \qquad d\left(y + x\frac{p}{q}\right) = 0.$$

On aura donc

$$\frac{p}{q} = \varphi(z), \qquad y + x\frac{p}{q} = \psi(z);$$

et, par conséquent, z sera déterminé par l'équation

$$y + x\,\varphi(z) = \psi(z).$$

Dans l'un et l'autre des exemples précédents, l'équation en λ a ses deux racines égales, et les équations différentielles de la caractéristique admettent trois combinaisons intégrables. La coïncidence n'est pas fortuite, et l'on peut démontrer que, si l'un des systèmes (8) ou (9) admet trois combinaisons intégrables, on a nécessairement $\lambda_1 = \lambda_2$ (¹).

715. Considérons encore l'équation

$$(1 + q^2)s - pqt = 0,$$

qui définit les surfaces pour lesquelles les sections faites par des

(¹) *Voir*, en particulier, notre *Mémoire sur les solutions singulières des équations aux dérivées partielles du premier ordre* (*Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des Sciences*, t. XXVII). Dans ce travail, nous donnons, après M. Lie, le moyen de former toutes les équations de la forme (1) pour lesquelles l'un des systèmes (8) et (9) admet trois combinaisons intégrables et qui peuvent être regardées, par suite, comme ayant deux intégrales intermédiaires du premier ordre.

plans parallèles au plan des yz sont des lignes de courbure. On a

$$A = B = D = 0, \qquad C = \frac{1+q^2}{2}, \qquad B' = -pq,$$
$$\lambda_1 = 0, \qquad \lambda_2 = -1 - q^2.$$

Les deux systèmes de caractéristiques sont définis par les équations

$$\begin{array}{cc} dz - p\,dx - q\,dy = 0, & dz - p\,dx - q\,dy = 0, \\ dx = 0, & pq\,dx + (1+q^2)\,dy = 0, \\ (1+q^2)\,dp - pq\,dq = 0, & (1+q^2)\,dq = 0, \end{array}$$

qui conduisent respectivement aux deux intégrales intermédiaires suivantes

$$\text{(16)} \qquad \frac{p^2}{1+q^2} = \varphi'^2(x), \qquad y + qz = \psi(q).$$

Tirons-en les valeurs de p et de y, pour les porter dans l'équation

$$dz = p\,dx + q\,dy.$$

Nous trouverons

$$dz = \sqrt{1+q^2}\,\varphi'(x)\,dx + q\,\psi'(q)\,dq - q^2\,dz - qz\,dq,$$

ce qui peut s'écrire

$$d\left(z\sqrt{1+q^2}\right) - \frac{\psi'(q)q\,dq}{\sqrt{1+q^2}} - \varphi'(x)\,dx = 0.$$

En intégrant, on aura donc

$$\text{(17)} \qquad z\sqrt{1+q^2} = \int \frac{\psi'(q)q\,dq}{\sqrt{1+q^2}} + \varphi(x).$$

L'équation précédente, jointe à celles du système (16), donnera l'intégrale complète de la proposée. Mais on peut obtenir une forme plus élégante. Effectuons la substitution définie par les formules

$$\frac{q}{\sqrt{1+q^2}} = \alpha, \qquad \psi(q) = \theta'(\alpha),$$

d'où l'on déduit

$$q = \frac{\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}}, \qquad \sqrt{1+q^2} = \frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2}}.$$

L'équation (17) et la seconde des équations (16) nous condui-

ront au système des deux suivantes

$$(18)\quad \begin{cases} z\sqrt{1-\alpha^2} - \alpha y + \theta(\alpha) = \varphi(x), \\ -\dfrac{z\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}} - y + \theta'(\alpha) = 0, \end{cases}$$

entre lesquelles il faudra éliminer α. La seconde s'obtient en prenant la dérivée de la première par rapport à α.

La première intégrale intermédiaire (16) exprime que les plans des lignes de courbure coupent la surface sous un angle constant.

716. Étudions enfin l'équation

$$rt - s^2 + a^2 = 0,$$

que l'on rencontre dans la théorie mécanique de la chaleur. On a ici

$$A = 1, \qquad B = C = B' = 0, \qquad D = a^2, \qquad \lambda_1 = a, \qquad \lambda_2 = -a.$$

Le système (8) devient le suivant

$$dz = p\,dx + q\,dy, \qquad dp + a\,dy = 0, \qquad dq - a\,dx = 0.$$

Il admet deux combinaisons intégrables évidentes $p + ay$ et $q - ax$, d'où l'on déduira une intégrale intermédiaire en écrivant que $p + ay$ est une fonction de $q - ax$. On pourra donc poser, en introduisant une variable auxiliaire α,

$$(19)\quad \begin{cases} p + ay = 2\alpha, \\ q - ax = 2\varphi(\alpha). \end{cases}$$

La système (9) conduirait de même aux deux équations

$$(20)\quad \begin{cases} p - ay = 2\beta, \\ q + ax = 2\psi(\beta), \end{cases}$$

qui, jointes aux précédentes, nous donnent

$$\begin{aligned} ax &= \psi(\beta) - \varphi(\alpha), \qquad & p &= \alpha + \beta, \\ ay &= \alpha - \beta, & q &= \varphi(\alpha) + \psi(\beta). \end{aligned}$$

Ces valeurs permettent de former la différentielle de z; on a

$$a\,dz = ap\,dx + aq\,dy = (\alpha + \beta)(d\psi - d\varphi) + (\varphi + \psi)(d\alpha - d\beta).$$

On déduit de là, en intégrant,

$$az = [\varphi(\alpha) + \psi(\beta)](\alpha - \beta) - 2\int \alpha\, d\varphi(\alpha) + 2\int \beta\, d\psi(\beta).$$

La solution est ainsi complètement déterminée; on peut la débarrasser de tout signe de quadrature en remplaçant les symboles φ et ψ par des dérivées φ' et ψ'. On trouve ainsi

$$(21) \qquad \begin{cases} ax = \psi'(\beta) - \varphi'(\alpha), \\ ay = \alpha - \beta, \\ az = (\alpha + \beta)[\psi'(\beta) - \varphi'(\alpha)] + 2\varphi(\alpha) - 2\psi(\beta), \end{cases}$$

$$(22) \qquad p = \alpha + \beta, \qquad q = \varphi'(\alpha) + \psi'(\beta).$$

Il suffira d'éliminer α et β entre les trois premières équations pour obtenir l'expression de z en fonction de x et de y.

717. Dans les deux derniers exemples que nous venons d'examiner, on peut obtenir une confirmation des résultats que nous avons signalés relativement aux caractéristiques, en étudiant, à l'aide des formules qui donnent l'intégrale générale, ce que nous pouvons appeler le *problème de Cauchy*, c'est-à-dire la détermination de la surface qui satisfait à l'équation aux dérivées partielles, passe par une courbe donnée et admet en chaque point de cette courbe un plan tangent donné. Pour plus de simplicité, nous nous contenterons d'examiner à ce point de vue l'équation qui a été intégrée dans le numéro précédent.

Soit (C) la courbe par laquelle doit passer l'intégrale. Comme p, q sont donnés pour chaque point de cette courbe, il résulte des formules (19) et (20) qu'en chacun de ces points on connaîtra α, β, $\varphi(\alpha)$, $\psi(\beta)$. Si, comme il arrive généralement, α et β ne conservent pas la même valeur en tous les points de la courbe, on connaîtra, par cela même, les fonctions $\varphi(\alpha)$, $\psi(\beta)$ pour toutes les valeurs de l'argument; et, par suite, l'intégrale cherchée sera complètement déterminée.

Mais il y a des cas d'exception. Nous laisserons au lecteur le soin de les étudier tous et nous nous contenterons de faire remarquer que, si la courbe (C) est une caractéristique; si l'on a, par exemple, en chacun de ses points,

$$p + ay = C, \qquad q - ax = C',$$

C et C′ étant deux constantes, la fonction $\varphi(\alpha)$ ne sera plus déterminée que pour une valeur de l'argument. D'après les formules (19), il suffira qu'elle ait la valeur $\frac{C'}{2}$ pour la valeur $\frac{C}{2}$ de l'argument. L'intégrale satisfaisant aux conditions proposées contiendra alors dans son expression une fonction $\varphi(\alpha)$ qui sera presque entièrement arbitraire, puisqu'elle sera assujettie à l'unique condition d'avoir une valeur donnée pour une valeur particulière de l'argument. Quant à la fonction $\psi(\beta)$, elle se déterminera comme dans le cas général.

718. Dans le cas où l'un ou l'autre des systèmes (8), (9) ne présente pas deux combinaisons intégrables, on ne connaissait aucune méthode permettant d'obtenir l'intégration de l'équation aux dérivées partielles proposée. Dans un travail déjà ancien ([1]), j'en ai proposé une, qui va plus loin que celle de Monge et qui permet d'obtenir l'intégration dans une infinité de cas nouveaux. L'exposition de cette méthode nous entraînerait loin de notre sujet; je me contenterai d'avoir donné une définition précise des caractéristiques, définition que nous allons employer dans l'étude de l'équation aux dérivées partielles des surfaces applicables sur une surface donnée.

Reprenons, pour cela, la méthode développée au n° 706; a, b, c étant les cosinus des angles que font les axes du trièdre mobile avec l'axe des x du trièdre fixe, c'est-à-dire avec une droite fixe quelconque de l'espace, on a

$$\frac{\partial x}{\partial u} = a\xi + b\eta, \qquad \frac{\partial x}{\partial v} = a\xi_1 + b\eta_1, \tag{23}$$

$$\left\{\begin{aligned} cp &= ar + \frac{\partial b}{\partial u}, & cp_1 &= ar_1 + \frac{\partial b}{\partial v}, \\ cq &= br - \frac{\partial a}{\partial u}, & cq_1 &= br_1 - \frac{\partial a}{\partial v}, \end{aligned}\right. \tag{24}$$

et l'équation aux dérivées partielles s'obtient en portant ces valeurs de p, q, p_1, q_1 dans la relation

$$pq_1 - qp_1 = \frac{\partial r}{\partial v} - \frac{\partial r_1}{\partial u}. \tag{25}$$

([1]) *Sur les équations aux dérivées partielles* (*Annales de l'École Normale*, 1re série, t. VII, p. 163; 1870).

Supposons, pour la commodité du langage, que l'on connaisse déjà une surface (S) admettant l'élément linéaire donné. Le *problème de Cauchy* peut s'énoncer ici de la manière suivante :

Étant donnée une courbe (Γ), *tracée sur* (S), *déterminer une fonction x, qui prenne, ainsi que ses deux dérivées premières, des valeurs données à l'avance en chaque point de* (Γ), ces fonctions devant évidemment satisfaire, quand on se déplacera sur (Γ), à la relation

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv, \tag{26}$$

qui détermine, par exemple, $\frac{\partial x}{\partial v}$ lorsqu'on se donne x et $\frac{\partial x}{\partial u}$.

Il résulte des formules (23) que a et b auront des valeurs connues en chaque point de la courbe (Γ). Il sera donc possible de calculer les différentielles da, db relatives à un déplacement s'effectuant sur cette courbe. Or on a

$$\tag{27} \left\{ \begin{aligned} \frac{da}{ds} &= b\left(r\frac{du}{ds} + r_1\frac{dv}{ds}\right) - c\left(q\frac{du}{ds} + q_1\frac{dv}{ds}\right), \\ \frac{db}{ds} &= c\left(p\frac{du}{ds} + p_1\frac{dv}{ds}\right) - a\left(r\frac{du}{ds} + r_1\frac{dv}{ds}\right). \end{aligned} \right.$$

Comme la rotation $r\frac{du}{ds} + r_1\frac{dv}{ds}$ dépend exclusivement de l'élément linéaire, on voit qu'il sera possible de calculer, en chaque point de (Γ), les rotations

$$P = p\frac{du}{ds} + p_1\frac{dv}{ds}, \qquad Q = q\frac{du}{ds} + q_1\frac{dv}{ds}$$

relatives à un déplacement sur cette courbe.

Or, si l'on se reporte aux formules du Tableau II [II, p. 383], on reconnaît immédiatement que la connaissance des quantités précédentes permet de calculer, en chaque point de (Γ), la courbure normale, la courbure géodésique et la torsion de cette courbe. On pourra évidemment exprimer la courbure et la torsion en fonction de l'arc de (Γ); et l'on sait que ces expressions déterminent d'une manière complète la forme de la courbe.

Réciproquement, supposons que l'on se donne la transformée (D) de (Γ). Ajoutons, pour préciser, que l'on a marqué sur (D) le

point B qui correspond à un point A de (Γ); alors le point M′ de (D) qui correspond à un point quelconque M de (Γ) sera déterminé par la condition que l'arc BM′ de (D) soit égal à l'arc AM de (Γ). Comme on connaît, en tous les points de (D), la courbure et la torsion, les formules des Tableaux I et II nous permettront de calculer, pour chaque point de cette courbe, l'angle ω que fait sa tangente avec l'axe des x du trièdre (T), ainsi que l'angle ϖ que fait la normale à la surface avec le plan osculateur [1] de la courbe. La détermination de ces deux angles permet évidemment de calculer sans ambiguïté les neuf cosinus directeurs qui feront connaître la position du trièdre (T) par rapport aux axes fixes lorsque (Γ) sera venue coïncider avec (D), et, en particulier, les cosinus a et b. On pourra donc déduire des formules (23) les valeurs de $\frac{\partial x}{\partial u}$, $\frac{\partial x}{\partial v}$, en chaque point de (D), ce qui nous ramènera à l'énoncé primitif.

Le problème que nous nous sommes proposé peut donc, dans tous les cas, être énoncé sous la forme suivante :

Étant donnée une surface (S), *la déformer de telle manière qu'une courbe* (Γ) *tracée sur cette surface vienne coïncider avec une courbe* (D), *donnée dans l'espace* [2].

Il sera susceptible d'une solution déterminée tant que la courbe (Γ) ne satisfera pas, en vertu des conditions posées, à la première des équations différentielles (5) des caractéristiques; et, par suite, l'étude de ses cas d'impossibilité et d'indétermi-

---

[1] L'angle ϖ toutefois ne sera réel que si la courbure $\frac{1}{\rho}$ en chaque point M′ de (D) est supérieure à la courbure géodésique $\frac{1}{\rho_g}$ de (Γ) au point correspondant M. Cela résulte immédiatement de l'équation évidente

$$\frac{\sin\varpi}{\rho} = \frac{1}{\rho_g}.$$

Ajoutons que l'angle ϖ, étant déterminé par son sinus, pourra prendre deux valeurs supplémentaires l'une de l'autre; ce qui conduira à deux solutions distinctes du problème que nous avons en vue.

[2] Le cas particulier où (D) est une droite ne présente pas de difficulté particulière et ne met pas en défaut nos conclusions; mais, pour plus de netteté, nous l'écarterons en laissant au lecteur le soin de le traiter.

nation nous fera connaître ces caractéristiques. Nous allons le traiter directement, en choisissant les variables les plus simples.

719. Rapportons les points de la surface à un système de coordonnées rectangulaires tel que la courbe (Γ) devienne une des courbes coordonnées et soit représentée par l'équation

$$v = 0,$$

ce qui est évidemment toujours possible.

On aura, en adoptant les notations du Tableau IV [II, p. 385],

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \mathrm{A}a, \qquad \frac{\partial x}{\partial v} = \mathrm{C}b. \tag{28}$$

Une fois connus a et b, les relations

$$\frac{\partial a}{\partial u} = br - cq, \qquad \frac{\partial b}{\partial u} = cp - ar, \tag{29}$$

relatives à un déplacement sur la courbe (Γ), feront connaître p et q. La relation, empruntée au Tableau IV,

$$\mathrm{A}q_1 + \mathrm{C}p = 0 \tag{30}$$

fera ensuite connaître q_1; et enfin l'équation (25) donnera p_1 *pourvu que q ne soit pas nulle*. Une fois connues les rotations p, q, p_1, q_1 pour chaque point de la courbe (Γ), les formules (24), donnant les dérivées premières des cosinus a et b, feront connaître par cela même les dérivées secondes de x pour chaque point de la courbe (Γ). Il résulte en effet des formules (28) que les dérivées secondes de x s'expriment en fonction de a, b et de leurs dérivées premières.

Le problème proposé, qui équivaut, nous l'avons vu, à la détermination des dérivées secondes de x en chaque point de (Γ), ne peut donc devenir impossible ou indéterminé que dans le cas où les conditions proposées donneraient pour q une valeur nulle. Or il suffit de se reporter à la formule (4) du Tableau IV pour reconnaître qu'alors la courbe (Γ) deviendrait une ligne asymptotique. Il est donc établi de nouveau que *les caractéristiques de l'équation aux dérivées partielles à laquelle satisfait x sont les lignes asymptotiques,* et nous pouvons énoncer le théorème suivant :

On peut toujours déformer une surface (S) *de telle manière qu'une courbe* (Γ), *tracée sur elle et donnée à l'avance, vienne coïncider avec une courbe* (D) *de l'espace, à moins que la condition ainsi proposée n'entraîne cette conséquence que* (D) *serait, après la déformation, une ligne asymptotique de la surface.*

On donnera plus de précision à la dernière partie de l'énoncé en la transformant de la manière suivante. Soit M le point de (Γ) qui devra coïncider avec un point quelconque M′ de (D). Si la courbure de la courbe (D) en M′ est constamment égale à la courbure géodésique de (Γ) au point correspondant M, le mouvement de déformation qui amènerait (Γ) à coïncider avec (D) ferait de cette courbe (D) une ligne asymptotique de la surface déformée, puisque la courbure géodésique de cette ligne serait, en chaque point, égale à sa courbure absolue. Nous obtenons donc la proposition suivante :

On peut toujours déformer la surface (S) *de telle manière qu'une de ses courbes* (Γ) *vienne coïncider avec une courbe quelconque de l'espace* (D), *pourvu que la courbure en chaque point de* (D) *ne soit pas égale à la courbure géodésique de* (Γ) *au point correspondant.*

720. Il ne nous reste plus qu'à distinguer les cas où le problème sera impossible de ceux où il sera indéterminé. C'est ce que l'on peut faire de la manière suivante.

Lorsque les équations (29) nous donneront pour q une valeur nulle, l'équation (25), qui faisait connaître p_1, se réduira, en chaque point de (Γ), à celle-ci

$$pq_1 = \frac{\partial r}{\partial v} - \frac{\partial r_1}{\partial u},$$

qui devient, si l'on tient compte de l'équation (30),

$$\left(\frac{p}{A}\right)^2 = -\frac{\dfrac{\partial r}{\partial v} - \dfrac{\partial r_1}{\partial u}}{AC}.$$

Si cette relation est vérifiée en chaque point de la courbe (D), le problème sera indéterminé; sinon il sera impossible. Or, si l'on

emploie les formules des Tableaux II et IV, on peut remplacer l'équation précédente par la suivante

$$\tau^2 = -RR', \tag{31}$$

où τ désigne le rayon de torsion de la courbe (D) et où R et R' sont les rayons de courbure principaux de la surface. Nous pouvons donc énoncer le résultat suivant :

Le problème proposé sera indéterminé si la torsion en chaque point de (D) *est égale à* $\sqrt{\frac{-1}{RR'}}$, $\frac{1}{RR'}$ *désignant la courbure de* (S) *au point correspondant de* (Γ). *Il sera impossible dans le cas contraire* (¹).

Nous retrouvons ici une propriété des lignes asymptotiques que nous devons à M. Enneper et qui a été déjà démontrée au n° **512**. Elle se relie, on le voit, de la manière la plus étroite à la proposition fondamentale que nous étudions maintenant, et d'après laquelle les lignes asymptotiques sont les caractéristiques de l'équation aux dérivées partielles dont dépend le problème de la déformation d'une surface.

721. Pour éclaircir les considérations précédentes, nous allons étudier quelques applications particulières.

Étant donnée une surface (S) *et une courbe* (Γ), *tracée sur cette surface, peut-on déformer la surface sans déformer la courbe?*

La réponse est très simple : la déformation est impossible si la courbe (Γ) n'est pas une asymptotique ; elle est possible d'une infinité de manières dans le cas contraire. C'est là une remarquable propriété des lignes asymptotiques.

Peut-on déformer la surface (S) *de telle manière qu'une de ses courbes* (Γ) *devienne une asymptotique de la surface déformée?*

(¹) Quand nous disons que le problème est indéterminé, nous entendons par là que les coefficients des séries par lesquelles la surface serait définie demeurent, en partie, arbitraires, sans que la convergence de ces séries soit établie.

Au reste, dans tous les cas où l'on peut effectuer l'intégration, on reconnaît que l'indétermination existe réellement.

La courbe (D) dans laquelle doit se transformer (Γ) sera pleinement déterminée par les propositions précédentes, puisqu'on connaîtra, en chaque point de (D), la courbure absolue, qui sera égale à la courbure géodésique de (Γ) au point correspondant, et la torsion, qui sera égale à la courbure totale de la surface en ce même point de (Γ). Ces deux quantités seront, par suite, des fonctions données de l'arc s, et leur détermination permettra de construire la courbe (D). Mais, bien que l'on connaisse cette courbe, le problème proposé sera indéterminé : il y aura une infinité de déformations de (S) pour lesquelles (Γ) coïncidera avec (D).

Étant donnée une courbe (D) *et une développable* (Δ) *circonscrite à* (D), *est-il possible de déformer une surface* (S) *de telle manière qu'elle vienne passer par* (D) *et soit tangente à* (Δ) *en tous les points de* (D)?

Ce problème est tout à fait différent des précédents; car on n'indique nullement la courbe de (S) qui doit venir coïncider avec (D). On peut le résoudre de la manière suivante.

Supposons d'abord que la développable (Δ) ne soit pas l'enveloppe des plans osculateurs de (D). Si le problème est possible, (D) ne sera pas une asymptotique de la surface déformée. Cherchons la courbe (Γ) de (S) qui viendra coïncider avec (D). Soit M' le point de (Γ) qui viendra en un point quelconque M de (D). Comme on connaît, au point M, la courbure de (D) et l'angle que fait le plan osculateur de cette courbe avec le plan tangent de la développable (Δ), qui doit devenir le plan tangent de la surface déformée, on connaîtra, par cela même, la courbure géodésique qu'aura (D) en M et par suite (Γ) en M'. Ainsi la courbure géodésique $\frac{1}{\rho_g}$ pourra être exprimée en fonction de l'arc. Soit

$$\rho_g = \varphi(s) \tag{32}$$

la relation ainsi obtenue. On en déduit aisément une équation du troisième ordre à laquelle devra satisfaire la courbe cherchée (Γ). Réciproquement, d'après ce que nous avons vu plus haut, toute courbe intégrale de cette équation fournira une solution du problème proposé.

Si, au contraire, la développable (Δ) est l'enveloppe des plans

osculateurs de (D), le problème ne sera possible que sous certaines conditions. En effet, au point M de (D), la torsion est connue, c'est une certaine fonction de l'arc. On a

$$\tau = \psi(s).$$

D'autre part, si le problème est possible, (D) sera évidemment une asymptotique de la surface déformée, et l'on aura nécessairement

$$\tau = \sqrt{-\mathrm{RR}'},$$

$\frac{1}{\mathrm{RR}'}$ étant la courbure totale de la surface au point M de (D) ou, ce qui est la même chose, au point M' de (Γ). On devra donc avoir

$$\mathrm{RR}' = -\psi^2(s), \tag{33}$$

et cette relation, qui conduit à une équation du premier ordre pour la courbe (Γ), devra avoir au moins une intégrale particulière commune avec l'équation (32). On va voir qu'il résulte de là une condition pour la courbe (D).

Différentions, en prenant v comme variable indépendante, trois fois l'équation (33) et une fois l'équation (32), après y avoir remplacé la courbure géodésique par son expression en fonction des coordonnées u, v. Nous obtiendrons ainsi un système de six équations dont les premiers membres seront des fonctions connues de $u, v, \frac{du}{dv}, \frac{d^2u}{dv^2}, \frac{d^3u}{dv^3}$. L'élimination de ces cinq quantités conduira, en général, à une seule relation de la forme

$$\Phi(\varphi, \varphi', \psi, \psi', \psi'', \psi''') = 0$$

ou encore

$$\Phi\left(\rho, \frac{d\rho}{ds}, \tau, \frac{d\tau}{ds}, \frac{d^2\tau}{ds^2}, \frac{d^3\tau}{ds^3}\right) = 0, \tag{34}$$

ρ, τ, s désignant le rayon de courbure, le rayon de torsion et l'arc de la courbe (D). On forme ainsi une équation différentielle à laquelle cette courbe devra satisfaire. En d'autres termes, la relation précédente devra être vérifiée par toutes les asymptotiques des surfaces résultant de la déformation de (S).

Cette équation se simplifie d'ailleurs dans certains cas spéciaux. Si la courbure totale de la surface donnée est constante et égale à

$-\frac{1}{a^2}$, on devra avoir simplement

$$\tau = a.$$

Ainsi la courbe (D) devra avoir sa torsion constante.

Supposons, par exemple, que l'on prenne pour (D) une hélice tracée sur un cylindre de révolution. Les courbes de la surface qui pourront s'appliquer sur cette hélice, tout en devenant des lignes asymptotiques, sont, évidemment, les cercles géodésiques dont la courbure géodésique est égale à la courbure de l'hélice (¹).

722. Puisque les asymptotiques sont les caractéristiques de l'équation aux dérivées partielles que nous étudions, il est naturel d'introduire la considération de ces lignes et de chercher quelles sont les équations aux dérivées partielles qui les déterminent, lorsqu'on connaît seulement l'élément linéaire de la surface. Nous allons commencer par résoudre le problème suivant :

L'élément linéaire d'une surface étant donné sous la forme

$$ds^2 = \mathrm{E}\,du^2 + 2\mathrm{F}\,du\,dv + \mathrm{G}\,dv^2,$$

quelles relations doit-il y avoir entre E, F, G *pour que les lignes coordonnées soient les asymptotiques de l'une des surfaces résultant de la déformation de la proposée?*

Reportons-nous à l'équation (5) du Tableau I [II, p. 382]. En exprimant que les coefficients de du^2 et de dv^2 sont nuls dans l'équation différentielle des asymptotiques, nous aurons

$$p\eta - q\xi = 0, \qquad p_1\eta_1 - q_1\xi_1 = 0;$$

ces deux conditions nous permettent de poser

$$p = \lambda\xi, \qquad q = \lambda\eta, \qquad p_1 = \mu\xi_1, \qquad q_1 = \mu\eta_1.$$

(¹) En terminant ce sujet, nous nous empressons de signaler le Mémoire suivant :

WEINGARTEN (J.), *Ueber die Deformationen einer biegsamen unausdehnbaren Fläche* (*Journal de Crelle,* t. C, p. 296; 1886),

où se trouvent étudiées, par des méthodes toutes différentes, les questions analogues à celles que nous venons d'examiner.

La proposition fondamentale d'après laquelle les asymptotiques sont les caractéristiques de l'équation aux dérivées partielles en x a été déjà donnée dans notre Cours de 1882; les autres développements donnés dans le texte remontent à nos Leçons de 1885.

Portant ces valeurs dans les deux relations de la troisième ligne du système (A) (même Tableau), nous trouverons

$$\lambda + \mu = 0, \qquad \frac{\partial r}{\partial v} - \frac{\partial r_1}{\partial u} = \lambda\mu(\xi\eta_1 - \eta\xi_1).$$

Si donc on désigne, pour abréger, par k la quantité

$$(35) \qquad k = \sqrt{\frac{\dfrac{\partial r_1}{\partial u} - \dfrac{\partial r}{\partial v}}{\xi\eta_1 - \eta\xi_1}} = \sqrt{\frac{-1}{\mathrm{RR'}}},$$

on aura

$$(36) \qquad \lambda = -\mu = k,$$

et les équations (A) entre les rotations nous donneront

$$(37) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial(k\xi)}{\partial v} + \frac{\partial(k\xi_1)}{\partial u} &= k(\eta r_1 + r\eta_1), \\ \frac{\partial(k\eta)}{\partial v} + \frac{\partial(k\eta_1)}{\partial u} &= -k(r\xi_1 + \xi r_1). \end{aligned} \right.$$

On déduit de là, après quelques réductions et en remplaçant r et r_1 par leurs valeurs tirées des équations (A),

$$(38) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \log k}{\partial u}(\mathrm{EG} - \mathrm{F}^2) &= \mathrm{F}\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial v} - \mathrm{E}\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial u}, \\ \frac{\partial \log k}{\partial v}(\mathrm{EG} - \mathrm{F}^2) &= \mathrm{F}\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial u} - \mathrm{G}\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial v}. \end{aligned} \right.$$

Telles sont les deux équations de condition cherchées.

Nous allons les écrire de manière qu'elles ne contiennent que des invariants des paramètres u et v des deux familles de lignes asymptotiques. Si l'on conserve H pour représenter $\sqrt{\mathrm{EG} - \mathrm{F}^2}$, on a

$$\Delta u = \frac{\mathrm{G}}{\mathrm{H}^2}, \qquad \Delta(u, v) = -\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{H}^2}, \qquad \Delta_2 u = \frac{1}{\mathrm{H}}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\mathrm{G}}{\mathrm{H}}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{H}}\right)\right],$$

$$\Delta(v, \Delta u) = \frac{\mathrm{E}}{\mathrm{H}^2}\frac{\partial \Delta u}{\partial v} - \frac{\mathrm{F}}{\mathrm{H}^2}\frac{\partial \Delta u}{\partial u} = \frac{\mathrm{E}}{\mathrm{H}^4}\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial v} - \frac{\mathrm{F}}{\mathrm{H}^4}\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial u} - \frac{2\,\mathrm{EG}}{\mathrm{H}^5}\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial v} + \frac{2\,\mathrm{GF}}{\mathrm{H}^5}\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial u},$$

et de là on déduit, par un calcul facile,

$$\Delta(v, \Delta u) - 2\,\Delta_2 u\,\Delta(u, v) = \frac{\mathrm{F}}{\mathrm{H}^4}\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial u} - \frac{\mathrm{G}}{\mathrm{H}^4}\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial v}.$$

D'autre part, on a aussi

$$\Theta(u, \log k) = \frac{1}{H}\frac{\partial \log k}{\partial v}, \qquad \Theta(u, v) = \frac{1}{H}.$$

Ces relations permettent de donner à la seconde équation (38) la forme définitive

$$(39) \qquad \Delta(v, \Delta u) - 2\Delta_2 u\,\Delta(u, v) = \Theta(u, \log k)\,\Theta(u, v),$$

qui ne contient plus que des invariants. Par raison de symétrie, la première des équations (38) prendra la forme analogue

$$(40) \qquad \Delta(u, \Delta v) - 2\Delta_2 v\,\Delta(u, v) = \Theta(v, \log k)\,\Theta(v, u).$$

Si maintenant, pour revenir à nos notations habituelles, nous désignons par u et v des coordonnées curvilignes quelconques et par α et β les paramètres des deux familles de lignes asymptotiques de la surface, nous voyons que ces paramètres α et β devront satisfaire aux deux équations simultanées du second ordre

$$(41) \qquad \left\{\begin{aligned} &\Delta(\alpha, \Delta\beta) - 2\Delta_2\beta\,\Delta(\alpha, \beta) = \Theta(\beta, \log k)\,\Theta(\beta, \alpha),\\ &\Delta(\beta, \Delta\alpha) - 2\Delta_2\alpha\,\Delta(\alpha, \beta) = \Theta(\alpha, \log k)\,\Theta(\alpha, \beta).\end{aligned}\right.$$

La première est linéaire par rapport aux dérivées de α, la seconde par rapport à celles de β. En éliminant, soit α, soit β, on sera conduit à une équation du troisième ordre à laquelle satisfera la fonction que l'on conserve. Il serait facile de former et d'écrire, à l'aide des invariants, cette équation du troisième ordre; mais nous laisserons ce point à étudier au lecteur.

723. Les calculs précédents conduisent à plusieurs conséquences sur lesquelles il convient d'insister.

En premier lieu, nous voyons que, si l'on donne, en même temps que l'élément linéaire d'une surface, ses lignes asymptotiques des deux systèmes, la surface est pleinement déterminée. En effet, si l'on prend ces deux familles d'asymptotiques pour lignes coordonnées, les calculs du n° 722 nous montrent que l'on connaîtra, pour chaque point de la surface, les six rotations. La forme de la surface sera donc entièrement connue (n° 484). Comme on peut prendre un double signe pour la valeur de k, on obtiendra en réalité deux surfaces, symétriques l'une de l'autre.

Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant, établi en premier lieu par M. O. Bonnet :

Si deux surfaces sont applicable, l'une sur l'autre de telle manière que toutes les lignes asymptotiques de l'une correspondent aux lignes asymptotiques de l'autre, les deux surfaces sont égales ou symétriques.

Mais on peut compléter cette proposition, en supposant que l'on connaisse une *seule* famille de lignes asymptotiques. Par exemple, dans les équations (41), on connaîtra α, dont l'expression sera donnée en fonction de u et de v. Il est aisé de voir que l'on pourra déterminer β.

En effet, substituons dans la seconde des équations (41) la valeur de α ; elle prend la forme

$$\mathrm{M}\frac{\partial\beta}{\partial u}+\mathrm{N}\frac{\partial\beta}{\partial v}=0.$$

Par suite, si M et N ne sont pas nuls en même temps, on obtiendra la seconde famille d'asymptotiques en intégrant l'équation du premier ordre

$$\mathrm{N}\,du-\mathrm{M}\,dv=0,$$

où M et N ne dépendent que de l'élément linéaire et de l'expression de α. Par conséquent, *la connaissance d'une des familles de lignes asymptotiques entraînera celle de l'autre.*

Examinons maintenant le cas d'exception où M et N seraient nuls en même temps. Alors la seconde des équations (41) sera vérifiée identiquement quand on y remplacera α par son expression donnée ; en d'autres termes, elle aura lieu quelle que soit la fonction β. En particulier, remplaçons-y β par α, il viendra

$$\Delta(\alpha,\,\Delta\alpha)-2\,\Delta_2(\alpha)\Delta\alpha=0. \tag{42}$$

Or cette équation exprime, nous l'avons vu (n° 676), que les courbes de paramètre α sont des géodésiques. Comme elles sont déjà des asymptotiques, elles ne peuvent être que des droites ; et notre cas d'exception se trouve ainsi défini : il ne peut avoir lieu que pour des surfaces réglées et pour la famille d'asymptotiques constituée par leurs génératrices rectilignes. En résumé, on obtient le résultat suivant :

Deux surfaces applicables l'une sur l'autre sont égales ou symétriques lorsque les lignes asymptotiques de l'un *des systèmes dans une des surfaces ont pour transformées des lignes asymptotiques (formant nécessairement un seul système) dans l'autre surface, à moins que les surfaces ne soient réglées et que les asymptotiques qui se correspondent ne soient les génératrices rectilignes.*

Cette proposition, qui est due à M. O. Bonnet (1), résulte immédiatement de ce que la connaissance d'une des familles asymptotiques entraîne celle de l'autre. Dans le Chapitre suivant, nous étudierons d'une manière spéciale la propriété qui se présente ici pour les surfaces gauches. Nous nous contenterons, pour le moment, de remarquer que, réciproquement, si la surface est gauche et si α est le paramètre des génératrices rectilignes, la seconde des équations (41) sera vérifiée identiquement quand on y remplacera β par une fonction quelconque. En effet, cette équation est vérifiée quand on y remplace β par α en vertu même de l'équation (42), à laquelle satisfait le paramètre α; elle l'est encore quand on y remplace β par le paramètre de la seconde famille de lignes asymptotiques; comme elle peut se ramener à la forme

$$\mathrm{M}\frac{\partial\beta}{\partial u}+\mathrm{N}\frac{\partial\beta}{\partial v}=0,$$

elle ne peut admettre deux intégrales *distinctes* sans se réduire à une identité.

724. On déduit de cette remarque une démonstration très simple de la proposition de M. Bonnet, déjà établie au Chapitre II [p. 239].

Si deux surfaces gauches (S_1) *et* (S_2) *sont applicables l'une sur l'autre, les génératrices rectilignes se correspondent sur les deux surfaces, à moins qu'elles ne soient, l'une et l'autre, applicables sur une surface du second degré* (S) *de telle manière que les génératrices rectilignes de* (S_1) *et de* (S_2) *correspondent aux deux systèmes différents de droites de* (S).

---

(1) *Journal de l'École Polytechnique*, XLIIe Cahier, p. 44.

En effet, supposons les deux surfaces rapportées au même système de coordonnées, et soient α, β les paramètres des deux familles de génératrices rectilignes de (S_1) et de (S_2). D'après la remarque précédente, β étant le paramètre des génératrices rectilignes de (S_2), l'équation

$$\Delta(\alpha', \Delta\beta) - 2\Delta_2\beta\,\Delta(\alpha', \beta) = \Theta(\beta, \log k)\,\Theta(\beta, \alpha')$$

sera une identité, c'est-à-dire qu'elle sera vérifiée quelle que soit la fonction α'. Pour la même raison, l'équation

$$\Delta(\beta', \Delta\alpha) - 2\Delta_2\alpha\,\Delta(\beta', \alpha) = \Theta(\alpha, \log k)\,\Theta(\alpha, \beta')$$

aura lieu pour toutes les fonctions β'. Remplaçons, dans la première, α' par α et, dans la seconde, β' par β : nous retrouverons les deux équations (41). Or ces équations expriment que α et β sont les paramètres des asymptotiques d'une surface admettant l'élément linéaire donné. Il y a donc une surface (S) applicable sur les deux surfaces réglées et admettant pour asymptotiques les courbes de paramètres α et β. Mais, comme toutes ces courbes correspondent à des droites de (S_1) ou de (S_2), elles sont géodésiques et, par conséquent, ne peuvent devenir asymptotiques sans se réduire à des droites. La surface (S) est donc doublement réglée; et ainsi se trouve complètement démontrée la proposition que nous avions en vue.

725. On peut introduire d'une manière toute différente la considération des lignes asymptotiques.

Soient u et v les coordonnées curvilignes d'un point de la surface, α et β les paramètres des deux familles d'asymptotiques. Au lieu de chercher les expressions de α et de β en u et v, proposons-nous de déterminer u et v, considérées comme fonctions des deux paramètres α et β.

Pour cela, nous remarquerons que, si l'on conserve toutes les notations du Tableau I [II, p. 382], l'équation différentielle (4) des lignes asymptotiques peut être remplacée par le système des deux suivantes

$$(43)\qquad \left\{\begin{aligned} p\,du + p_1\,dv &= \lambda(\xi\,du + \xi_1\,dv),\\ q\,du + q_1\,dv &= \lambda(\eta\,du + \eta_1\,dv),\end{aligned}\right.$$

où λ désigne une inconnue auxiliaire. Si, pour la déterminer, on élimine $\frac{du}{dv}$ entre les deux équations précédentes, on est conduit, en tenant compte d'une des équations du Tableau (A), à l'équation

$$\lambda^2(\xi\eta_1 - \eta\xi_1) + pq_1 - qp_1 = 0,$$

qui nous donne

$$\lambda^2 = \frac{-1}{RR'} = k^2, \qquad \lambda = \pm k. \tag{44}$$

Ainsi λ est un invariant dont on connaît la valeur. En prenant successivement les deux signes, on est conduit successivement aux deux systèmes

$$\left\{\begin{aligned} p\frac{\partial u}{\partial\alpha} + p_1\frac{\partial v}{\partial\alpha} &= \lambda\left(\xi\frac{\partial u}{\partial\alpha} + \xi_1\frac{\partial v}{\partial\alpha}\right),\\ q\frac{\partial u}{\partial\alpha} + q_1\frac{\partial v}{\partial\alpha} &= \lambda\left(\eta\frac{\partial u}{\partial\alpha} + \eta_1\frac{\partial v}{\partial\alpha}\right),\end{aligned}\right. \tag{45}$$

$$\left\{\begin{aligned} p\frac{\partial u}{\partial\beta} + p_1\frac{\partial v}{\partial\beta} &= -\lambda\left(\xi\frac{\partial u}{\partial\beta} + \xi_1\frac{\partial v}{\partial\beta}\right),\\ q\frac{\partial u}{\partial\beta} + q_1\frac{\partial v}{\partial\beta} &= -\lambda\left(\eta\frac{\partial u}{\partial\beta} + \eta_1\frac{\partial v}{\partial\beta}\right),\end{aligned}\right. \tag{45'}$$

qui permettront, par exemple, de calculer p, q, p_1, q_1. En portant les valeurs obtenues dans le système (A), on aura les équations aux dérivées partielles qui déterminent u et v, considérées comme fonctions de α et de β.

Le calcul est beaucoup abrégé si l'on écrit, par exemple, la première de ces relations sous la forme, qu'il est aisé de vérifier,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(p\frac{\partial u}{\partial\alpha} + p_1\frac{\partial v}{\partial\alpha}\right) - \frac{\partial}{\partial\alpha}\left(p\frac{\partial u}{\partial\beta} + p_1\frac{\partial v}{\partial\beta}\right) = {}& \left(q\frac{\partial u}{\partial\alpha} + q_1\frac{\partial v}{\partial\alpha}\right)\left(r\frac{\partial u}{\partial\beta} + r_1\frac{\partial v}{\partial\beta}\right)\\ &- \left(q\frac{\partial u}{\partial\beta} + q_1\frac{\partial v}{\partial\beta}\right)\left(r\frac{\partial u}{\partial\alpha} + r_1\frac{\partial v}{\partial\alpha}\right).\end{aligned}$$

En remplaçant $p\frac{\partial u}{\partial\alpha} + p_1\frac{\partial v}{\partial\alpha}$, $p\frac{\partial u}{\partial\beta} + p_1\frac{\partial v}{\partial\beta}$, $\dots$, par leurs valeurs déduites des formules (45), on trouvera

$$\begin{aligned}2\lambda\xi\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha\,\partial\beta} + 2\lambda\xi_1\frac{\partial^2 v}{\partial\alpha\,\partial\beta} + 2\frac{\partial u}{\partial\alpha}\frac{\partial u}{\partial\beta}\left(\frac{\partial\lambda\xi}{\partial u} - \lambda\eta r\right) + 2\frac{\partial v}{\partial\alpha}\frac{\partial v}{\partial\beta}\left(\frac{\partial\lambda\xi_1}{\partial v} - \lambda\eta_1 r_1\right)&\\ + \left(\frac{\partial u}{\partial\alpha}\frac{\partial v}{\partial\beta} + \frac{\partial u}{\partial\beta}\frac{\partial v}{\partial\alpha}\right)\left(\frac{\partial\lambda\xi}{\partial v} + \frac{\partial\lambda\xi_1}{\partial u} - \lambda\eta r_1 - \lambda\eta_1 r\right) &= 0.\end{aligned}$$

Cette relation peut même se décomposer en deux autres, à cause de l'indétermination des translations ξ, η, ξ_1, η_1 qui sont assujetties seulement aux trois conditions

$$\xi^2 + \eta^2 = \mathrm{E}, \qquad \xi\xi_1 + \eta\eta_1 = \mathrm{F}, \qquad \xi_1^2 + \eta_1^2 = \mathrm{G}.$$

En annulant successivement ξ et ξ_1 et remplaçant les trois autres translations par leurs valeurs déduites des équations précédentes, on obtiendra ces deux équations aux dérivées partielles

$$(46)\quad \left\{\begin{aligned} &2\mathrm{H}^2\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha\,\partial\beta} + \frac{\partial u}{\partial\alpha}\frac{\partial u}{\partial\beta}\left(2\mathrm{H}^2\frac{\partial\log k}{\partial u} + \mathrm{G}\frac{\partial\mathrm{E}}{\partial u} - 2\mathrm{F}\frac{\partial\mathrm{F}}{\partial u} + \mathrm{F}\frac{\partial\mathrm{E}}{\partial v}\right)\\ &\qquad + \left(\frac{\partial u}{\partial\alpha}\frac{\partial v}{\partial\beta} + \frac{\partial u}{\partial\beta}\frac{\partial v}{\partial\alpha}\right)\left(\mathrm{H}^2\frac{\partial\log k}{\partial v} + \mathrm{G}\frac{\partial\mathrm{E}}{\partial v} - \mathrm{F}\frac{\partial\mathrm{G}}{\partial u}\right)\\ &\qquad\qquad + \frac{\partial v}{\partial\alpha}\frac{\partial v}{\partial\beta}\left(2\mathrm{G}\frac{\partial\mathrm{F}}{\partial v} - \mathrm{G}\frac{\partial\mathrm{G}}{\partial u} - \mathrm{F}\frac{\partial\mathrm{G}}{\partial v}\right) = 0,\\ &2\mathrm{H}^2\frac{\partial^2 v}{\partial\alpha\,\partial\beta} + \frac{\partial v}{\partial\alpha}\frac{\partial v}{\partial\beta}\left(2\mathrm{H}^2\frac{\partial\log k}{\partial v} + \mathrm{E}\frac{\partial\mathrm{G}}{\partial v} - 2\mathrm{F}\frac{\partial\mathrm{F}}{\partial v} + \mathrm{F}\frac{\partial\mathrm{G}}{\partial u}\right)\\ &\qquad + \left(\frac{\partial u}{\partial\alpha}\frac{\partial v}{\partial\beta} + \frac{\partial u}{\partial\beta}\frac{\partial v}{\partial\alpha}\right)\left(\mathrm{H}^2\frac{\partial\log k}{\partial u} + \mathrm{E}\frac{\partial\mathrm{G}}{\partial u} - \mathrm{F}\frac{\partial\mathrm{E}}{\partial v}\right)\\ &\qquad\qquad + \frac{\partial u}{\partial\alpha}\frac{\partial u}{\partial\beta}\left(2\mathrm{E}\frac{\partial\mathrm{F}}{\partial u} - \mathrm{E}\frac{\partial\mathrm{E}}{\partial v} - \mathrm{F}\frac{\partial\mathrm{E}}{\partial u}\right) = 0. \end{aligned}\right.$$

Elles sont, on le reconnaîtra aisément, nécessaires et suffisantes; de sorte qu'il suffirait de les intégrer pour obtenir les deux familles d'asymptotiques, par suite les six rotations (n° 722) et la surface elle-même.

726. Pour indiquer au moins une application, supposons que l'élément linéaire soit donné par la formule

$$(47)\qquad ds^2 = du^2 + (au^2 + 2bu + c)\,dv^2,$$

où a, b, c désignent des constantes. On aura ici

$$\mathrm{E} = 1, \qquad \mathrm{F} = 0, \qquad \mathrm{G} = au^2 + 2bu + c, \qquad k = \frac{\sqrt{ac - b^2}}{\mathrm{G}}.$$

Les deux équations en u et v deviendront

$$(48)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha\,\partial\beta} - \frac{\partial\log\mathrm{G}}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial\alpha}\frac{\partial u}{\partial\beta} - \frac{1}{2}\frac{\partial\mathrm{G}}{\partial u}\frac{\partial v}{\partial\alpha}\frac{\partial v}{\partial\beta} = 0,\\ &\frac{\partial^2 v}{\partial\alpha\,\partial\beta} = 0. \end{aligned}\right.$$

La seconde s'intègre immédiatement et admet deux solutions distinctes

$$v = \varphi(\alpha), \qquad v = \varphi(\alpha) + \psi(\beta),$$

qui peuvent être remplacées par les suivantes

$$v = \alpha, \qquad v = \alpha + \beta,$$

sans que la généralité soit diminuée.

La première solution $v = \alpha$ fait évidemment connaître les surfaces réglées admettant l'élément linéaire donné. La seconde,

$$v = \alpha + \beta,$$

nous conduit pour u à l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha\,\partial\beta} - \frac{\partial \log G}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial\alpha}\frac{\partial u}{\partial\beta} - \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u} = 0.$$

Prenons, par exemple,

$$G = u;$$

on trouvera, en posant

$$u = e^{\omega}, \tag{49}$$

que ω doit satisfaire à l'équation

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial\alpha\,\partial\beta} = \frac{1}{2} e^{-\omega}. \tag{50}$$

On sait intégrer cette équation [1]; mais nous ne poursuivrons pas ici les calculs, que nous retrouverons plus loin et qui conduisent à la détermination de toutes les surfaces applicables sur les développées des surfaces minima.

---

[1] Son intégrale est déterminée par la formule

$$e^{-\omega} = \frac{4A'B'}{(A-B)^2},$$

où A et B désignent des fonctions arbitraires de α et de β respectivement. Elle a été donnée, en premier lieu, par M. Liouville, qui l'a déduite de la remarque suivante : l'équation aux dérivées partielles (50) exprime que la surface dont l'élément linéaire a pour expression

$$ds^2 = e^{-\omega}\, d\alpha\, d\beta$$

a sa courbure constante et égale à 1.

Si la constante a n'est pas nulle, on pourra ramener G à la forme

$$G = u^2 + b^2, \tag{51}$$

et, en posant

$$u = b \operatorname{tang} \frac{\omega}{2}, \tag{52}$$

on reconnaîtra que ω doit satisfaire à l'équation

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial \alpha \, \partial \beta} = \sin \omega. \tag{53}$$

La valeur (51) de G convient à l'alysséide et à l'hélicoïde minimum (nos 66 et 68). C'est donc de l'intégration de l'équation précédente que dépend la détermination des surfaces non réglées qui sont applicables sur ces surfaces. Nous retrouverons plus loin ce résultat.

CHAPITRE VI.

DÉFORMATION DES SURFACES GAUCHES.

Élément linéaire des surfaces gauches. — Surfaces dont les génératrices vont rencontrer le cercle de l'infini. — Surfaces qui admettent un plan directeur tangent au cercle de l'infini. — Détermination complète de toutes les surfaces gauches admettant un élément linéaire donné. — Différents problèmes relatifs à ces surfaces. — Autre méthode fondée sur l'emploi des formules de M. Codazzi. — Questions diverses relatives aux lignes asymptotiques et aux lignes de courbure. — Propriétés de la ligne de striction. — Surfaces réglées applicables sur les surfaces de révolution. — Il y a, dans ce cas, une relation linéaire entre les deux courbures de la ligne de striction.

---

727. Dans le Chapitre précédent, nous avons été conduits, par la discussion de différentes propositions, à considérer d'une manière spéciale le cas où une surface réglée se déforme sans que ses génératrices cessent d'être rectilignes. Cette déformation particulière des surfaces réglées, dont l'étude vient se présenter ici, mérite que nous nous y arrêtions assez longuement et que nous signalions les résultats intéressants obtenus sur ce sujet par différents géomètres.

Étant donnée une surface réglée (R), traçons sur cette surface une courbe (C) assujettie à l'unique condition de rencontrer toutes les génératrices rectilignes. Par un point M de la surface, on peut mener la génératrice rectiligne; elle ira couper la courbe (C) en un point M'. Soient v une variable propre à déterminer la position de M' sur la courbe (C) et u une quantité égale ou proportionnelle à la longueur de M'M ou de sa projection sur un plan quelconque. Les variables u et v définiront la position de M sur la surface et, si x, y, z désignent les coordonnées rectangulaires de ce point, on pourra écrire

$$(1)\qquad x = a_1 u + b_1, \qquad y = a_2 u + b_2, \qquad z = a_3 u + b_3,$$

a_1, a_2, a_3; b_1, b_2, b_3 désignant des fonctions quelconques de v.

Posons

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} A &= a_1'^2 + a_2'^2 + a_3'^2, & D &= a_1 b_1' + a_2 b_2' + a_3 b_3',\\ B &= a_1' b_1' + a_2' b_2' + a_3' b_3', & E &= a_1^2 + a_2^2 + a_3^2.\\ C &= b_1'^2 + b_2'^2 + b_3'^2, \end{aligned}\right.$$

On trouvera

$$(3)\qquad ds^2 = E\,du^2 + (E' + 2D)\,du\,dv + (A u^2 + 2Bu + C)\,dv^2.$$

Cette formule va nous permettre d'indiquer la classification des surfaces réglées, tant imaginaires que réelles.

Si l'on a d'abord

$$E = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 0,$$

toutes les génératrices rectilignes vont rencontrer le cercle de l'infini; elles forment une des familles de longueur nulle de la surface. Cette première classe de surfaces réglées, toutes imaginaires si l'on excepte la sphère, comprend comme un genre spécial les développables définies au n° 116 [I, p. 148, note].

Si nous écartons ces surfaces exceptionnelles, nous pourrons supposer que u est la longueur MM′, prise avec son signe, et que l'on a

$$(4)\qquad a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1.$$

La formule (3) se simplifie alors et devient

$$(5)\qquad ds^2 = du^2 + 2D\,du\,dv + (A u^2 + 2Bu + C)\,dv^2.$$

Nous avons déjà remarqué au n° 67 que l'on peut, par une simple quadrature et en remplaçant u par $u' - \int D\,dv$, faire disparaître le terme en $du'\,dv$ et déterminer ainsi les trajectoires orthogonales des génératrices. Nous pourrons donc, dans la suite, supposer D égal à zéro; mais, pour rendre les applications plus commodes, nous n'introduirons pas cette hypothèse d'une manière générale.

Si la surface est réelle ainsi que ses génératrices, la fonction A, somme de trois carrés, n'est pas nulle; mais on reconnaît aisément qu'elle le devient pour les surfaces qui ont un plan directeur tangent au cercle de l'infini, et pour celles-là seulement. Dans ce

cas, l'élément linéaire est réductible à la forme

$$ds^2 = du^2 + 2D\,du\,dv + (2Bu + C)\,dv^2.$$

Une seule des surfaces correspondantes est réelle : c'est le paraboloïde de révolution. Si l'on prend l'équation de cette surface sous la forme

$$x^2 + y^2 = 2pz,$$

et si l'on pose

$$\begin{aligned} x + iy &= \left(u + \frac{p}{2} + piv\right) e^{iv-1}, \\ x - iy &= 2pe^{-iv+1}, \\ z &= u + \frac{p}{2} + piv, \end{aligned}$$

un calcul facile donne, pour l'élément linéaire, l'expression

$$ds^2 = du^2 + 2p(u + ipv)\,dv^2,$$

déjà signalée au n° 692.

728. Si l'on écarte les deux séries de surfaces exceptionnelles que nous venons de signaler et pour lesquelles *il n'y a ni ligne de striction ni point central sur chaque génératrice,* l'élément linéaire pourra toujours être réduit algébriquement à la forme (5), dans laquelle A sera différent de zéro. Nous bornant à cette hypothèse spéciale, qui convient d'ailleurs à toutes les surfaces dont les génératrices sont réelles, nous allons montrer en premier lieu qu'il existe une infinité de surfaces gauches admettant cet élément linéaire que l'on supposera donné *a priori*. Au reste, la méthode très élémentaire que nous allons suivre s'appliquerait presque sans modification aux deux cas spéciaux que nous laissons de côté [1].

Joignons l'équation (4) aux quatre premières équations (2) : nous formerons ainsi un système de cinq équations où les fonctions

---

[1] Le premier auteur qui ait étudié la question dont nous nous occupons ici est MINDING. *Voir,* en particulier, le Mémoire *Ueber die Biegung gewisser Flächen,* inséré en 1838 au tome XVIII du *Journal de Crelle*. Depuis, MM. Bonnet, Bour, Beltrami et d'autres géomètres ont repris cette étude dans des Mémoires que nous citerons plus loin.

A, B, C, D seront connues, mais où figureront six fonctions inconnues a_1, a_2, a_3; b_1, b_2, b_3. On peut prendre arbitrairement une de ces fonctions; et l'on reconnaît ainsi immédiatement *qu'il y a une infinité de surfaces gauches admettant l'élément linéaire donné* (5).

Les fonctions a_1, a_2, a_3, prises isolément, doivent satisfaire aux deux équations

$$(6)\qquad \begin{cases} a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1, \\ a_1'^2 + a_2'^2 + a_3'^2 = \mathrm{A}, \end{cases}$$

dont la résolution n'offre aucune difficulté. On prendra, par exemple, $a_2 = f(a_1)$; la première équation donnera a_3 en fonction de a_1 et la seconde déterminera a_1 en fonction de v par une quadrature.

a_1, a_2, a_3 sont les cosinus directeurs de la génératrice rectiligne; on peut les regarder comme les coordonnées rectangulaires d'un point situé sur la sphère de rayon 1. La résolution des équations précédentes équivaut donc au problème suivant :

Déterminer une courbe sphérique dont l'arc soit une fonction donnée de v.

Il est clair que cette courbe peut être tracée arbitrairement sur la sphère. En d'autres termes, *le cône directeur de la surface n'est jusqu'ici assujetti à aucune condition.*

Considérons donc a_1, a_2, a_3 comme connus. Alors les trois équations non employées

$$(7)\qquad \begin{cases} a_1 b_1' + a_2 b_2' + a_3 b_3' = \mathrm{D}, \\ a_1' b_1' + a_2' b_2' + a_3' b_3' = \mathrm{B}, \\ b_1'^2 + b_2'^2 + b_3'^2 = \mathrm{C} \end{cases}$$

feront connaître b_1, b_2, b_3. On les résoudra comme il suit.

Prenons comme inconnue auxiliaire le déterminant fonctionnel

$$(8)\qquad \mathrm{H} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1' & a_2' & a_3' \\ b_1' & b_2' & b_3' \end{vmatrix};$$

si nous l'élevons au carré, nous trouverons, en tenant compte

des équations (6) et (7),

$$(9) \qquad H^2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & D \\ 0 & A & B \\ D & B & C \end{vmatrix} = AC - B^2 - AD^2,$$

ce qui donnera la valeur de H. Alors l'équation (8) pourra être jointe aux deux premières du système (7) et, en résolvant ces équations *du premier degré,* on trouvera

$$(10) \qquad \begin{cases} b'_1 = D a_1 + \dfrac{B}{A} a'_1 + \dfrac{H}{A}(a_2 a'_3 - a_3 a'_2), \\ b'_2 = D a_2 + \dfrac{B}{A} a'_2 + \dfrac{H}{A}(a_3 a'_1 - a_1 a'_3), \\ b'_3 = D a_3 + \dfrac{B}{A} a'_3 + \dfrac{H}{A}(a_1 a'_2 - a_2 a'_1), \end{cases}$$

de sorte que b_1, b_2, b_3 s'obtiendront par de simples quadratures. Les formules précédentes appellent plusieurs remarques.

729. D'abord il résulte des propositions établies au Chapitre précédent qu'en laissant de côté le cas spécial, dont l'examen n'offre d'ailleurs aucune difficulté, où l'élément linéaire conviendrait à une surface du second degré, les formules (10) donnent bien *toutes les surfaces réglées admettant l'élément linéaire donné.*

En second lieu, le cône directeur de la surface pourra être choisi arbitrairement. En effet, soient donnés a_1, a_2, a_3 en fonction d'une variable t, satisfaisant à la première équation (6). La seconde nous donnera une équation de la forme

$$\Pi(t)\, dt = A\, dv,$$

qui fera connaître t par une quadrature. Il y aura une infinité de solutions distinctes, à moins que le cône directeur ne soit de révolution ou ne se réduise à un plan.

Quelques considérations géométriques expliqueront assez bien le résultat précédent. Traçons sur une surface réglée (R) des génératrices rectilignes infiniment voisines (d_1), (d_2), (d_3), ...; considérons comme rigides les parties de la surface comprises entre les génératrices consécutives (d_{i-1}), (d_i), mais en admettant

que, des deux parties séparées par une génératrice (d_i), l'une puisse tourner, tout d'une pièce, autour de (d_i) comme charnière sans entraîner l'autre. Soit, d'autre part, (C) un cône donné et soit (δ_1) une de ses génératrices, *choisie arbitrairement*. Par un mouvement d'ensemble de la surface gauche, amenons (d_1), à être parallèle à (δ_1). Faisons ensuite tourner toute la partie de la surface située du même côté que (d_2) par rapport à (d_1), jusqu'à ce que (d_2) devienne parallèle à une des génératrices du cône (C), et soit (δ_2) cette génératrice. Recommençant de même pour (d_2), on pourra, en faisant tourner toute la partie de la surface qui est du côté de (d_3), amener cette droite (d_3) à devenir parallèle à une génératrice (δ_3) de (C); et ainsi de suite. La nouvelle forme ainsi obtenue de la surface gauche dépendra, en général, du choix de la génératrice initiale (δ_1) qui n'est assujetti à aucune condition.

730. Les formules (10) prêtent encore à une remarque très intéressante, qui a été signalée rapidement par M. Beltrami [1], mais sur laquelle il convient d'insister. Elles contiennent une quantité H dont le carré seul est défini par l'équation (9) et qui, par suite, peut être prise avec un double signe.

Il existe donc toujours deux surfaces réglées applicables l'une sur l'autre et dans lesquelles les génératrices correspondantes sont parallèles et de même sens.

Considérons, par exemple, l'hyperboloïde de révolution défini par l'équation

$$\frac{x^2+y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1. \tag{11}$$

On peut prendre ici

$$\left\{\begin{aligned} \frac{x}{a} &= \frac{u}{\Delta}\cos v + \sin v, \\ \frac{y}{a} &= \frac{u}{\Delta}\sin v - \cos v, \qquad (\Delta = \sqrt{a^2+c^2}) \\ \frac{z}{c} &= \frac{u}{\Delta}. \end{aligned}\right. \tag{12}$$

---

[1] BELTRAMI (E.), *Sulla flessione delle superficie rigate* (*Annali di Matematica pura ed applicata,* pubblicati da B. Tortolini, t. VII, p. 105; 1865).

On trouvera

$$ds^2 = du^2 + 2\frac{a^2}{\Delta}\,du\,dv + \frac{a^2}{\Delta^2}(u^2 + \Delta^2)\,dv^2.$$

On a donc ici

$$D = \frac{a^2}{\Delta}, \qquad A = \frac{a^2}{\Delta^2}, \qquad B = 0, \qquad C = 0;$$

et, par suite, la surface qui est applicable sur l'hyperboloïde avec parallélisme des génératrices sera définie par les formules

$$(13)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{x}{a} &= \frac{u}{\Delta}\cos v + \frac{a^2 - c^2}{a^2 + c^2}\sin v,\\ \frac{y}{a} &= \frac{u}{\Delta}\sin v - \frac{a^2 - c^2}{a^2 + c^2}\cos v,\\ z &= \frac{c}{\Delta}u + 2\frac{a^2 c}{\Delta^2}v. \end{aligned}\right.$$

C'est une surface hélicoïde dans laquelle une hélice correspond au cercle de gorge de l'hyperboloïde.

Après cette application particulière, revenons à la proposition générale et proposons-nous de rechercher si les deux surfaces dans lesquelles les génératrices correspondantes sont parallèles peuvent se déduire l'une de l'autre par une *déformation continue*. Pour répondre à cette question, il est nécessaire de rappeler quelques propriétés élémentaires des surfaces gauches.

Remarquons d'abord que, d'après la seconde des formules (6), $\sqrt{A}\,dv$ sera l'angle des deux génératrices infiniment voisines de paramètres v et $v + dv$.

D'après cela, supposons que, dans l'expression (5) de ds^2, on laisse v et dv constants, mais que l'on fasse varier u et du; on aura la distance de deux points infiniment voisins, pris respectivement sur les génératrices de paramètres v et $v + dv$. Or cette distance devient la plus petite possible lorsqu'on a

$$du = -D\,dv, \qquad u = -\frac{B}{A};$$

et elle est égale alors à $\frac{H}{\sqrt{A}}dv$. Donc, si l'on désigne par $\beta\,dv$ la plus courte distance des deux génératrices (v) et $(v + dv)$, on a

$$(14)\qquad \beta = \frac{H}{\sqrt{A}}.$$

De plus, le pied de cette plus courte distance, ou le *point central,* correspond à la valeur de u définie par l'équation

$$u = -\frac{B}{A}. \tag{15}$$

Et enfin, d'après une propriété connue des surfaces gauches ([1]), le paramètre de distribution, qui est égal à $\beta\, dv$ divisé par l'angle des génératrices infiniment voisines, aura pour valeur

$$\varpi = \frac{\beta}{\sqrt{A}} = \pm\frac{H}{A}. \tag{16}$$

Il y a lieu ici de faire une remarque essentielle.

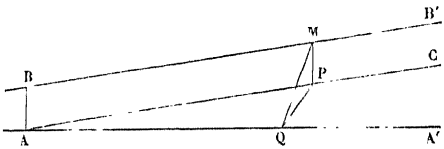
731. Si l'élément linéaire seul est donné, l'expression de ϖ contient un radical et, par suite, le signe de ϖ ne peut être déterminé. Mais il n'en est plus de même lorsque la surface est définie par des équations de la forme (1). Alors, en remplaçant H et A par

---

([1]) Pour plus de clarté, nous allons rapporter ici la démonstration bien connue qui donne l'élément linéaire et les propriétés élémentaires des surfaces gauches.

Soient (*fig.* 73) AA′, BB′ deux génératrices infiniment voisines dont les para-

Fig. 73.



mètres seront v et $v + dv$. Si AB est la plus courte distance de ces deux génératrices, la valeur principale de AB sera

$$AB = \beta\, dv,$$

β étant une certaine fonction de v. Menons par A une parallèle AC à BB′ et, par le point M de BB′, menons MP, perpendiculaire à AC, et MQ, perpendiculaire à AA′. Le triangle MPQ étant rectangle, nous avons

$$PQ = MP \tang\varphi, \qquad MQ^2 = MP^2 + PQ^2, \tag{a}$$

φ désignant l'angle QMP. D'autre part, le triangle APQ rectangle en Q nous donne, en négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur

$$PQ = AQ\, d\sigma,$$

leurs valeurs dans l'équation (16), on trouve

$$\varpi = \frac{\pm 1}{a_1'^2 + a_2'^2 + a_3'^2} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1' & a_2' & a_3' \\ b_1' & b_2' & b_3' \end{vmatrix},$$

de sorte que le signe du second membre reste à déterminer. Pour cela, conformément à une méthode bien connue, plaçons-nous dans une hypothèse particulière et supposons que la génératrice considérée vienne coïncider avec l'axe des z. On aura alors

$$a_1 = a_2 = 0, \qquad a_3 = 1, \qquad b_1 = b_2 = b_3 = 0.$$

Le plan tangent à la surface gauche, en un point de l'axe des z, aura pour équation

$$\frac{Y}{X} = \frac{a_2' z + b_2'}{a_1' z + b_1'}.$$

Si l'on veut que l'origine soit le *point central* et le plan des xz le *plan central*, il faudra que l'on ait

$$b_2' = 0, \qquad a_1' = 0,$$

$d\sigma$ étant l'angle des deux génératrices AA' et BB'. Si l'on désigne par u et α les distances de Q et de A au point où une trajectoire orthogonale fixe coupe AA', on a

$$AQ = u - \alpha,$$

et, par suite, les formules (a) nous donnent

$$(b) \qquad \tang\varphi = \frac{(u-\alpha)\,d\sigma}{\beta\,dv}, \qquad MQ^2 = \beta^2 dv^2 + (u-\alpha)^2 d\sigma^2.$$

Or MQ peut être regardé comme étant égal à l'arc, compris entre AA' et BB', de la trajectoire des génératrices passant en M. On aura donc pour l'élément linéaire la formule

$$ds^2 = du^2 + \left[\beta^2 + (u-\alpha)^2 \frac{d\sigma^2}{dv^2}\right] dv^2$$

et, si l'on a choisi v de telle manière que $d\sigma$ soit égal à dv,

$$(c) \qquad ds^2 = du^2 + [\beta^2 + (u-\alpha)^2]\, dv^2.$$

D'autre part, φ est évidemment l'angle que fait le plan tangent en M avec le plan tangent en B au point central; et, par suite, la première des équations (b) nous donne le théorème de M. Chasles, exprimé par la formule

$$(d) \qquad \tang\varphi = \frac{u-\alpha}{\varpi}, \qquad \text{où} \qquad \varpi = \frac{\beta\,dv}{d\sigma}.$$

Ce sont les résultats que nous rappelons dans le texte. Nous emploierons plus loin la formule (c), où l'on connaît la signification géométrique de tous les termes.

équations auxquelles on peut joindre la suivante

$$a'_3 = 0,$$

obtenue en différentiant la relation identique entre les trois cosinus. D'après cela, l'équation du plan tangent deviendra

$$Y = \frac{a'_2}{b'_1} z X,$$

et le paramètre de distribution sera

$$\varpi = \frac{b'_1}{a'_2}$$

En comparant à la valeur générale de ϖ, on voit qu'il faut prendre

$$(17) \qquad \varpi = \frac{-1}{a'^2_1 + a'^2_2 + a'^2_3} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a'_1 & a'_2 & a'_3 \\ b'_1 & b'_2 & b'_3 \end{vmatrix}.$$

Il suit de cette détermination précise du signe de ϖ (¹) que les deux surfaces gauches signalées plus haut, qui sont applicables l'une sur l'autre avec parallélisme des génératrices homologues, par cela seul qu'elles correspondent à des valeurs de H égales et de signes contraires, ont leurs paramètres de distribution égaux et de signes contraires pour deux génératrices homologues. Or il est clair que, si l'on déforme, *d'une manière continue,* une surface réglée, on ne change pas le signe du paramètre de distribution. Ainsi, quoique les deux surfaces soient applicables l'une sur l'autre, on ne peut, en général, passer de l'une à l'autre par une déformation continue. C'est là le fait que nous voulions mettre hors de doute.

Ajoutons cette propriété : Quand deux points correspondants décrivent sur les deux surfaces des génératrices parallèles, les plans tangents tournent toujours du même angle, mais dans des sens

(¹) Il est très facile de comprendre pourquoi le paramètre de distribution a un signe. Fixons un sens sur une génératrice rectiligne; quand le point se déplacera dans ce sens, le plan tangent tournera autour de la droite dans le sens des rotations positives ou dans le sens opposé. Dans le premier cas, le paramètre de distribution est positif, il est négatif dans le second. Le signe ainsi établi ne dépend pas du sens que l'on a fixé sur la génératrice.

opposés. Ils sont parallèles pour les points centraux et pour les points à l'infini.

732. Les formules que nous avons données permettent de résoudre ou d'aborder quelques questions intéressantes que nous allons indiquer rapidement.

Peut-on déformer une surface réglée de telle manière que l'une de ses courbes devienne plane?

Nous pouvons évidemment supposer que cette courbe corresponde à l'hypothèse $u = 0$. Admettons, d'autre part, que le plan dans lequel elle sera située ait été choisi pour plan des yz. On devra avoir

$$b'_1 = 0,$$

c'est-à-dire

$$\mathrm{AD}\,a_1 + \mathrm{B}\,a'_1 + \mathrm{H}(a_2 a'_3 - a_3 a'_2) = 0.$$

Mais, d'après les équations (6), on peut écrire

$$\begin{aligned} a_2 a'_3 - a_3 a'_2 &= \sqrt{(a_2^2 + a_3^2)(a'^2_2 + a'^2_3) - (a_2 a'_2 + a_3 a'_3)^2} \\ &= \sqrt{(\mathrm{A} - a'^2_1)(1 - a_1^2) - a_1^2 a'^2_1}. \end{aligned}$$

L'équation du problème devient donc

$$\mathrm{AD}\,a_1 + \mathrm{B}\,a'_1 = \mathrm{H}\sqrt{\mathrm{A}(1 - a_1^2) - a'^2_1} \tag{18}$$

et ne contient plus que l'inconnue a_1; a_2 et a_3 se détermineront ensuite par la première équation (6) jointe à la suivante

$$\frac{a_2 a'_3 - a_3 a'_2}{a_2^2 + a_3^2} = \frac{\sqrt{\mathrm{A}(1 - a_1^2) - a'^2_1}}{1 - a_1^2}, \tag{19}$$

qui donnera $\dfrac{a_2}{a_3}$ par une quadrature. Tout se ramène donc [1] à l'intégration de l'équation différentielle.

On peut intégrer dans le cas où la courbe donnée est une trajectoire orthogonale des génératrices; car alors on a $\mathrm{D} = 0$, et

---

[1] BELTRAMI (E.), Mémoire cité plus haut, p. 119.

l'équation peut s'écrire

$$\frac{a'_1}{\sqrt{1-a_1^2}} = \frac{\mathrm{H}\sqrt{\mathrm{A}}}{\sqrt{\mathrm{B}^2+\mathrm{H}^2}}. \tag{20}$$

Une simple quadrature fera connaître a_1 (¹).

733. *Peut-on déformer une surface réglée de telle manière qu'une de ses lignes devienne droite?*

Cette ligne devra, évidemment, être géodésique; il faut donc trouver une condition correspondante.

Admettons toujours que la ligne donnée corresponde à l'hypothèse $u = 0$ et prenons pour axe des z la droite dans laquelle elle se transformera. On devra avoir cette fois

$$b'_1 = b'_2 = 0,$$

et, par suite, les équations (7) nous donneront

$$a_3 b'_3 = \mathrm{D}, \qquad a'_3 b'_3 = \mathrm{B}, \qquad b'^2_3 = \mathrm{C}.$$

On en déduit

$$b'_3 = \sqrt{\mathrm{C}}, \qquad a_3 = \frac{\mathrm{D}}{\sqrt{\mathrm{C}}}, \qquad a'_3 = \frac{\mathrm{B}}{\sqrt{\mathrm{C}}},$$

et de là résulte la condition annoncée

$$\frac{\mathrm{B}}{\sqrt{\mathrm{C}}} = \left(\frac{\mathrm{D}}{\sqrt{\mathrm{C}}}\right)'.$$

Connaissant a_3, on aura a_1 et a_2 par les deux équations

$$a_1^2 + a_2^2 = 1 - a_3^2, \qquad a'^2_1 + a'^2_2 = \mathrm{A} - a'^2_3,$$

qui se résolvent, on le reconnaît aisément, par une quadrature; car

---

(¹) Dans le cas général, l'équation appartient au type suivant

$$\mathrm{M}y^2 + 2\mathrm{N}yy' + \mathrm{P}y'^2 = 1,$$

où M, N, P sont des fonctions de x. On peut la ramener à l'une des formes suivantes

$$y^2 + y'^2 = \varphi(x),$$
$$y' = a + by + cy^2 + dy^3,$$

a, b, c, d étant des fonctions de x.

15069 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS ET FILS, quai des Grands-Augustins, 55.

Carnegie Institute of Technology
Library
PITTSBURGH, PA.

Rules for Lending Books:

1. Reserved books may be used only in the library until 8 P. M. After that hour they may be requested for outside use, due the following morning at 9:30. Ask at the desk about week-end borrowing privileges.

2. Books not of strictly reference nature, and not on reserve may be borrowed for longer periods, on request. **Date due** is stamped on date slip in book.

3. A fine of five cents an hour is charged on overdue reserve book. Two cents a day fine is charged on overdue unreserved books.